

Fraktál - növekedés

http://angel.elte.hu/~vicsek -> oktatás

miért fontos?

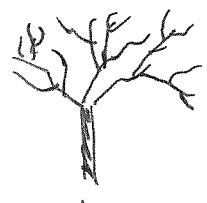
- ember észlelt objektumok ált. nem fraktálok
(megj.: pl. az asztal felülete nanométeres skálán elég bonyolult)

- természetben nagyon gyakori

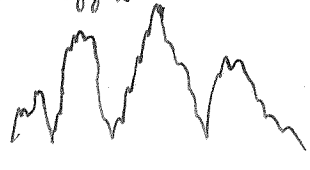
pl.: felhő, Anglia partja, fák, bizonyos hegyek



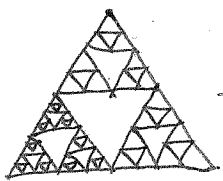
felhő, partvonal,
vezeték vonal



elágazó struktúra (minohurrok)
fa, villám, gyökér,
érhálózat



felületek
hegyorom,
mikroszkopikus felbontásban a legtöbb felület ilyen
fizikai függvények



-> csak hurrok van benne

fontos fogalmak: - skalázás

$$f(x) \text{ skalázó fgv., ha } f(x) = b^{-a} f(b \cdot x)$$

ilyenek a hatványfgr.-ek

- instabilitás

az elágazó szerkezet instabilitás útján jön létre:

instabil felület, kis perturbáció nem kicimul, hanem nőni kezd



- kollektív viselkedés

sok hasonló egységből álló rdsz.-ben az egységek viselkedhetnek
- individuuálisan
- kollektíven

pl.: ideális gáz molekulái individuuálisan viselkednek

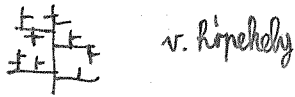
kiütés

folyadék - részecskék már nem függetlenek, de még nem hívjuk kollektív viselkedésnek,
Brown-mozgás - véletlenszerűen mozognak

szilárd, rias - kollektív viselkedés eredményeként

fraktálok is ált. sok k. ható egységből épülnek fel, ezek k. hatása hozza létre a fraktált

sok kristályos anyag szabályos elágazó szerkezettel kristályosodik



3 fő téma:

- fraktálok (geometria, fraktálgeometria alapjai)
- modellezés
- gyakorlati növekedési jelenségek

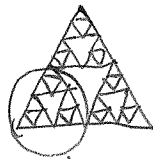
Fraktál geometria

a fraktálok (típusosan) önhasonlók (skála-invariánsak)

↓
 vizuálisan: az objektum kis részét felnagyítva az hasonlít az eredetihez
 v. másképp: az objektumot felisimítva úgy néz ki, mint az eredeti objektum egy része

matematikai értelemben vett fraktál absztrakció

pl: $k=1$ lépés



$k=2$



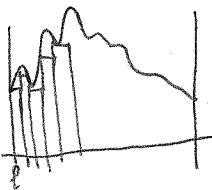
↳ ezt duplázzra vett. kapom, mint az eredeti

matematikai fraktál: $k \rightarrow \infty$, ∞ kicsi részletekkel rendelkezik \rightarrow teljesen önhasonló
 véges sok k -lépés után duplázzra a fenti részt a legkisebb részecskék is duplázzódnak, nem lesz teljesen nagy, mint az eredeti

fraktál: van egy méretskála, amin belül igaz az önhasonlóság

beágyazási dimenzió (d): az a legkisebb euklideszi dimenzió, amelyben dimenziójú euklideszi térbe még éppen befér

egy fraktál objektumot fraktálnak nevezünk, ha a térfogata/felülete/hosszát mérvé azonos módszerrel az nem konvergál jól (0 -v. ∞ -hoz tart), l -et több nagyságrenden keresztül változtatva

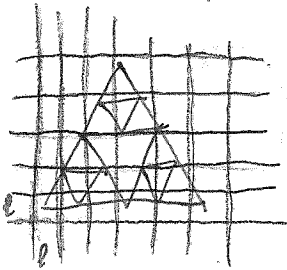


fraktál: pl. Δ -es szerkezet $\left\{ \begin{array}{l} \text{teli } \Delta\text{-ekből felépítve: terület} \rightarrow 0 \\ \text{vonalakkal: vonalak teljes hossza} \rightarrow \infty \end{array} \right.$

$l \rightarrow 0 \Rightarrow$ megpróbáljuk a görbe alatti területet — ha ∞ -ig tart a szerkezet, akkor nem konvergál

olyan mére, ami konvergens.

területe 0, kora végtelen \rightarrow az objektumot leíró dimenzió 1 és 2 között van



lefedjük d helyes dimenziójú káboval

megszámoljuk, hány dobozban van része a fraktálnak $\rightarrow N(l)$

$$V(l) \sim l^d \cdot N(l)$$

vagy kisgolyókkal fedem le a fraktált,
ehhez $N(l)$ db. golyó kell

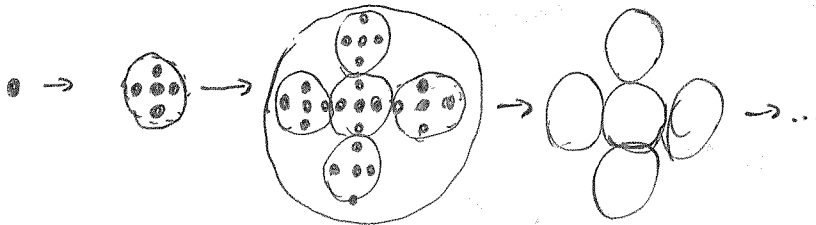
$l \rightarrow 0$, $V(l)$ véges



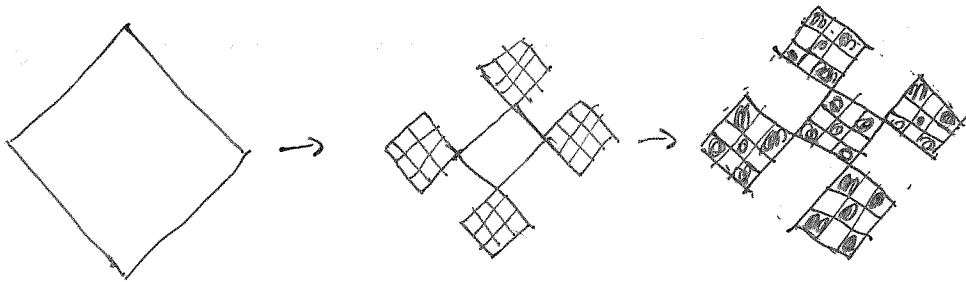
$$N(l) \sim l^{-d}$$

fraktálok konstrukciója: - növekedő
- felosztódó (frak)

növekedő:



felosztódó:



MAE. kor, mint az előző növekedő, átskálázás után

$\forall k < \infty$ -re ezek átskálázhatóak egymásba, ekvivalensek

pl: (Koveredés) felhő felületének számítása

természetben túlmennyiségű növekedéssel keletkeznek a fraktálok

elméleti vizsgálatokhoz a felosztódó oszlopot előnyösebb

fraktál: \exists egy legkisebb és legnagyobb méret

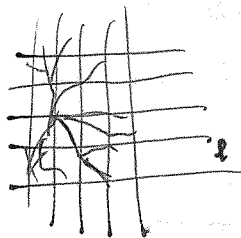
fraktál: nem 1, 2, 3 dimenziós $\rightarrow D$ fraktáldimenzióval lehet leírni

02.23.

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

fraktáldim.



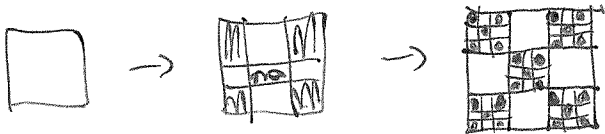
növekvő struktúra: $N(L) \sim L^D$

invariancia \leftrightarrow hatványfüggvény.

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}$$

a 2 def. ekvivalens (\forall -t a (0-1) szakaszon elhelyezve)

pl:



növekedéssel:

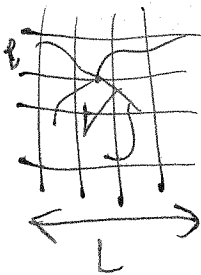


$$N(L) = 5^k, \quad L = 3^k \quad (\text{mivel: } 3\text{-szor alkotja, } 5\text{-szor annyi a részecské 1 lépés után})$$

\Downarrow

$$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465$$

fiz. fraktál: \exists legkisebb és legnagyobb méret (L)



$$\epsilon := \frac{l}{L} \quad \epsilon \ll 1$$

$$\text{ezzel } N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$$

ez is magz. a D lesz

Hausdorff-dimenzió:

megadja mértékül a fraktál térfogatát (mértékét)

$$M(\epsilon, D_h) := \inf_{\text{felosztás}} \sum_i r_i^{D_h} \quad r_i < \epsilon$$

a beágyazási dim.-nek megfelelően



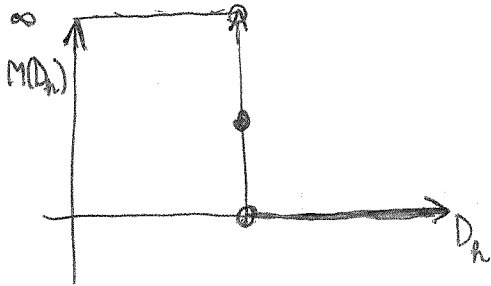
r_i sugarú körökkel / gömbökkel fedjük az objektumot

ezek sugara különböző lehet egymástól, de $< \epsilon$

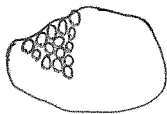
optimális fedést szeretnénk $\rightarrow \sum_i r_i^{D_h}$ minimumát vesszük

$$M(D_h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(\epsilon, D_h)$$

$D_H := \sup\{D_h, \text{amire } M(D_h) > 0\}$, ez a Hausdorff-dimenzió.



2D objektum:



$$N(r) \sim r^{-2}$$

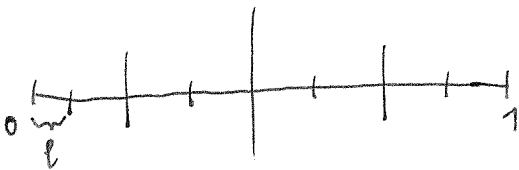
$$\sum_i r_i^{D_h} \rightarrow r^{-2} \cdot r^{D_h} = r^{D_h-2}$$

$D_h = 2$: véges mérték $\rightarrow D_H = 2$

$D_h > 2$: 0

$D_h < 2$: $\rightarrow \infty$

pl: rac. számok $[0, 1]$ -en dimenziója:



ldobozok, hány dobozban \exists rac. szám? $l \rightarrow 0$: $N(l) \rightarrow l^{-1}$, \forall kis ϵ számon \exists rac. szám

$$\Rightarrow D_{\text{rac}} = 1$$

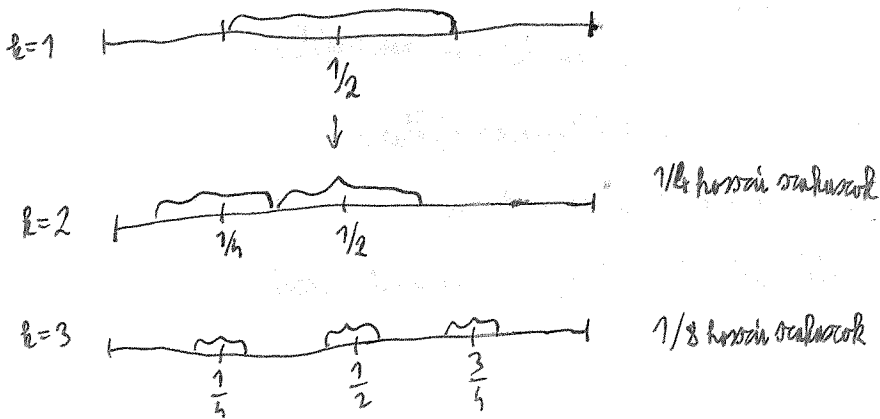
intuíción: \mathbb{Q} elemei megszámlálható sokan, $[0, 1]$ kontinuum számosságú pontból áll \rightarrow

\rightarrow a dimenziója 0

Hausdorff:

Hausdorff-méret:

B. lépés: $(1/2)^k$ hosszú szakaszok fedés



következő méretszám, ...

k. lépés: k méretszám körül $(1/2)^k$ hosszú intervallum

$$M(k, D_k) = k \cdot (1/2)^k D_k$$

$k \rightarrow \infty$ esetén $\forall D_k > 0$ -n $M(k, D_k) = 0$ lesz

\Downarrow
 $D_H = 0$ a méretszámok dim.-ja

Hasonos összefüggések

- terület fraktáldim.-ja: (pl. fa lényegében)

d_p dim.-ra vetítve:

~~D_p~~ ~~fraktáldim.~~

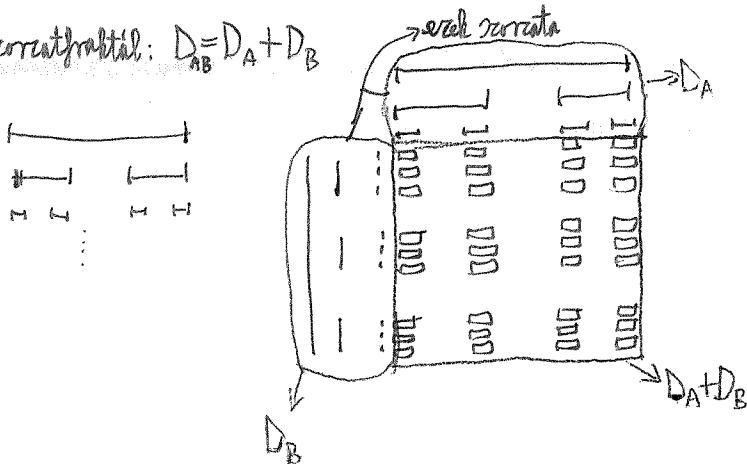
$D_p = D$ ha ~~D_p~~ $d_p > D$

$D_p = d_p$ $d_p \leq D$

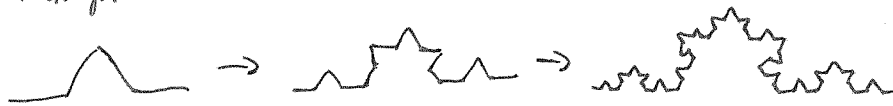
- d -m dim. méretet $\rightarrow D$ -m lesz a fraktáldim.-ja
 beágyazott dim.

- 2 fraktál D_A és D_B -vel

szorzatfraktál: $D_{AB} = D_A + D_B$



Koch-görbe:



szorzata önmagával?

- 2 fraktál uniója, $D_A > D_B$

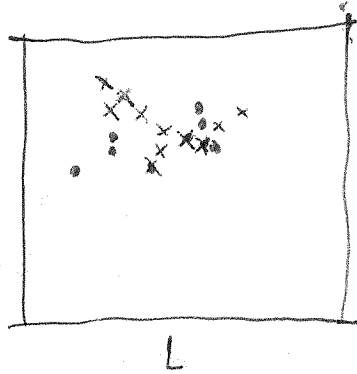
$$D_{A \cup B} = D_A$$

A befedéséhez: $N(l) \sim N_A(l) \sim N(l)^{-D_A}$ mió: $\sim N(l)^{-D_A} + N(l)^{-D_B} \sim N(l)^{-D_A}$
 B - " - : $N(l) \sim N_B(l) \sim N(l)^{-D_B}$
 ↑
 gyorsabban divergál

- 2 fraktál metszete

$$D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$$

L méretű doboz



metszetfr. sűrűsége = 2 sűrűség szorzata (sűrűség = valószínűség, hogy a fraktálhoz tartozik egy doboz)

A, B részeshalmaz sűrűsége $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d}$, $\frac{L^{D_B}}{L^d} \rightarrow$ ~~is~~ részeshalmaz sűrűsége B-ben
 $\frac{L^{D_B}}{L^d} \rightarrow$ ~~is~~ térfogat

$$\text{metszet sűrűsége} = \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$$

$$N_{A \cap B} \sim \text{sűrűség} \cdot L^d = \frac{L^{D_A} \cdot L^{D_B}}{L^d} \sim L^{D_{A \cap B}} \Rightarrow D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$$

spec.: $D_B = 2$, metszet } $\rightarrow D_{\text{metszet}} = D_A - 1$
 $d = 3$

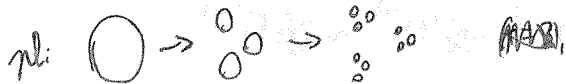
Fraktalok típusai

1) determinisztikus és véletlen fraktalok

determinisztikus fraktalok

iterációval konstruáljuk

kezdő obj., \forall lépésben $\frac{1}{r}$ -re kicsinyített, n db. másolatával helyettesíttem



$$N\left(\left(\frac{1}{r}\right)^k\right) = n^k$$

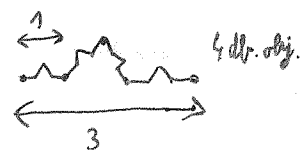
Koch görbe $\rightarrow n=4, r=3$

$$\downarrow$$

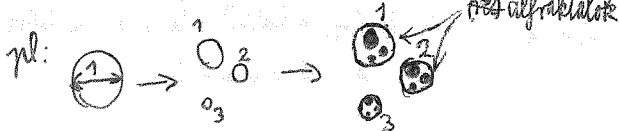
$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

növekvő is hasonlóan

lin. méret hányszorozása $n^D \rightarrow r$
 hányszor ismétlem $\rightarrow n$



nem-uniform fraktál: $r_i > 1$, r_i -k különbözőek



r_1, r_2, r_3

átmérők $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$

$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots$ nagyon különböző mérettel is előfordulnak

$N_i(\epsilon)$: ϵ sugarú gömbök száma, amik az i . alfraktál lefedéséhez szükségesek

az egész lefedéséhez $N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon)$ *átlag* gömb kell

Nem-uniform fraktál:

$1/r_i$ kicsinyítés

k lépés után egy adott fraktál: $\left(\frac{1}{r_1}\right)^l \left(\frac{1}{r_2}\right)^m \left(\frac{1}{r_3}\right)^{k-l-m}$

hány kis dobozzal fedhető le? $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$

$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon)$ (dobozok száma = alfraktálok lefedéséhez szükséges dobozok összege)

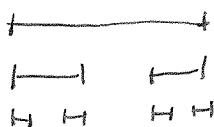
$N_i(\epsilon/r_i) = N(\epsilon)$ az önhasonlóság miatt $\rightarrow N_i(\epsilon) = N(r_i \epsilon) \sim (r_i \epsilon)^{-D}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{r_i}\right)^D = 1$ egyenlet a fraktáldimenzióra

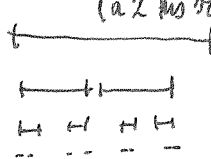
$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon) \rightarrow \epsilon^{-D} = \sum_i (r_i \epsilon)^{-D}$

stochasztikus fraktál (iterációval)

pl: Cantor-halmaz:



stochasztikusan: 1 lépésben véletlenszerűen elhelyezünk 2 $1/3$ hosszú szakaszt (a 2 kis szakasz nem bontható egymásba)

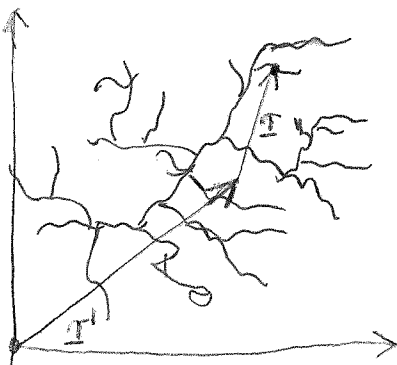


annyi lesz a betöltött rész, mint a Cantor-halmaznál \Rightarrow
 \Rightarrow az a fraktáldimenziójuk

véletlen fraktál (nem iterációval)

a legtöbb fraktál a természetben ilyen, nincsen rá iterációs szabály

fraktáldim.-ja dobozokkal is mérhető, de célszerűbb a korrelációs fgv. (függel)-ét nézni



ezek szerkezetét a sűrűség-sűrűség v. párhonrelációs fgv. jellemzi

$$c(r) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}'} g(\mathbf{r} + \mathbf{r}') g(\mathbf{r}')$$

$g(\mathbf{r}) = 1$, ha \mathbf{r} az objektumhoz tartozik
 $= 0$, különben

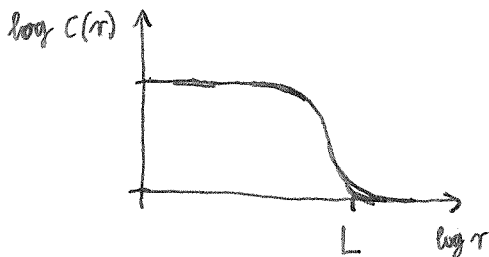
$c(r)$: végigmegyünk a fraktál pontjain, ha van tőle r távolságra is pontja a fraktálnak, akkor van járuléka

növekvő fraktál: $V = N$, ahol N a részecskék száma a klaszterben

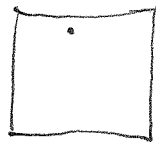
$c(r)$: mi a val. szim.-e, hogy r távolságra legyen részecskéje a fraktálnak, ha \mathbf{r}' a fraktálon van.

általában a fraktál izotrop, $c(\underline{r}) = c(|\underline{r}|) = c(r)$

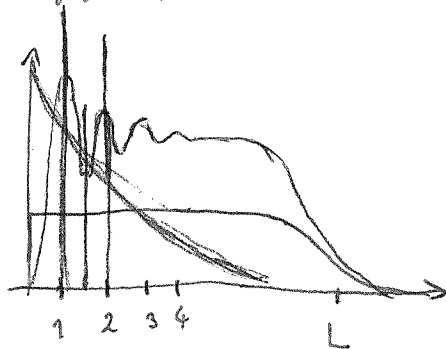
homogén anyagra:



L hosszú, homogén négyzet:



atomos anyagra: (L méretű rész.)



fraktál
brótolys (de: kristály anizotrop, $c(\underline{r})$ lesz)
folyadék
gáz

fraktál önhasonló $\Rightarrow c(r) \sim r^{-\alpha} c(r) \Rightarrow c(r) \sim r^{-\alpha}$

L sugarú gömbben lévő részecskék száma: $N(L) \sim \int_0^L c(r) d^d r \sim L^{d-\alpha} \sim L^D$

$\Rightarrow D = d - \alpha$

Példák:

1.) Cantor-halmaz (3-ad részét kiveszük kiragynak)

$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$

ált. n his szakasz, $1/r$ hosszú

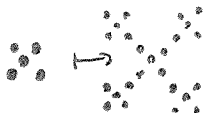
$n=2, r=4$
 $n=3, r=9$

$\} D = \frac{1}{2}$, de a két fraktál másként néz ki

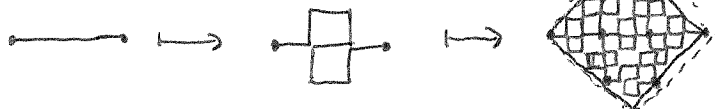


$D = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

NAE, mint:



3.) Peano-görbe, 2D vonal $\rightarrow D = \frac{\ln 9}{\ln 3}$



sűrűn behalózva a piros négyzetet,
több ponthoz közel kerül

mezj: racionális számok Hausdorff-dimenziója $D_H = 0$

Cantor-halmaz: racionális pontok a végpontjai \rightarrow mégse lesz $D_H = 0$

4.) Sierpinski-sűrű



mindenféle mértékű luk lesz rajta

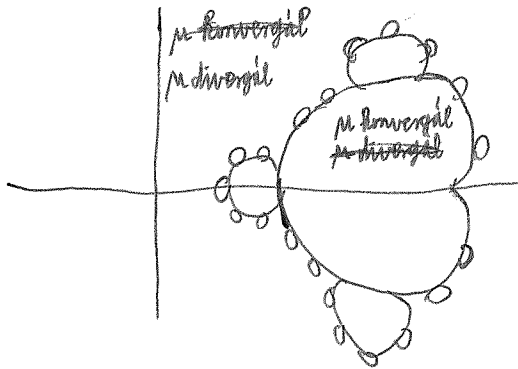
$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

5.) Mandelbrot-Halmaz

$$\mu, z \in \mathbb{C}$$

$$z_{k+1} = z_k^2 - \mu$$

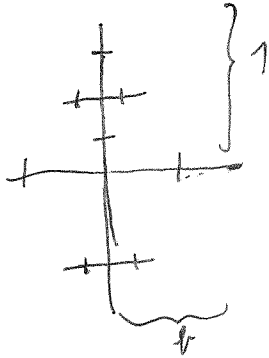
$z_0 = 0$, $k \rightarrow \infty$ esetén milyen μ -re konvergál?



a 2 köti határ egy fraktál

6.)

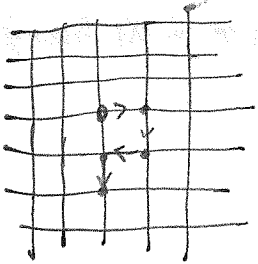
$$\sum_{i=1}^m \tau_i^{-D} = 1$$



$$2\left(\frac{1}{2}\right)^D + 2\left(\frac{b}{2}\right)^D = 1$$

$$n^d: b=1/2 \rightarrow D = \frac{1 - \ln(\sqrt{3}-1)}{\ln 2} \approx 1,45$$

7.) véletlen bolyongás (stochasztikus fraktál)



rész, ezen lépések véletlen irányokba

vagy: folytonos modell,

Poisson-elv. szerinti közp.

véletlen irány

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t \quad d\text{-től függetlenül}$$

↓

$$\langle R(t) \rangle \sim t^{1/2}$$

a 2 helyre az univ. osztályba tartozik

vizsgáljuk a bolyongó részecske pályáját, azaz \downarrow lépésben

lebecsülünk egy (átlagos) részecskét oda, ahol épp van a bolyongó részecske

↓

$$N(R) \sim t \sim \langle R^2(t) \rangle \Rightarrow D=2 \quad \text{a beágyazási dim.-től függetlenül}$$

his a beágyazó dim. 2 \rightarrow páca, nem fraktál

3 \rightarrow fraktál lesz

8.) Levy - repulés

folgt. bolyongás általánosítása

4 irányú olyan val. sim.-gel

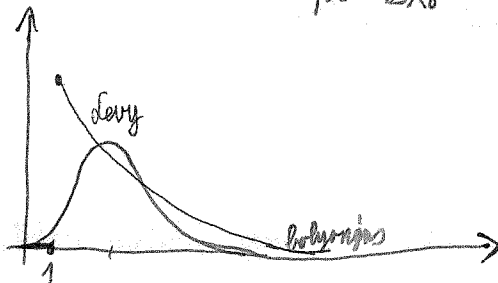
a távolság (amely) amennyit egy irányba megy, most nem Poisson-elő.

Δx hosszú ugrás

$$\begin{cases} P(\Delta x > \Delta x_0) = \Delta x_0^{-D_L}, & \text{ha } \Delta x_0 \geq 1 \\ P(\Delta x > \Delta x_0) = 1, & \text{ha } \Delta x_0 < 1 \end{cases}$$


\Rightarrow sűrűségf. -e: $f(x) \propto x^{-D_L-1}$

$$n \propto \Delta x_0^{-D_L-1}, \quad 1 \leq \Delta x_0$$



hátvonalf. \rightarrow nagy (és) ugrások valószínűsége sokkal nagyobb, mint exp. bolyongásnál

képe:

 néha nagy ugrás, aztán sok kicsi
csillagrendszerekre jó modell

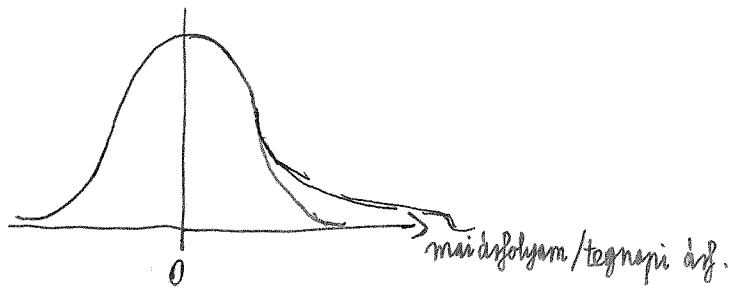
fraktáldim. $D = D_L$, ha $D_L < 2$

$D = 2$, ha $D_L > 2$ ha gyorsan csökken, míg viselkedik, mint exp. bolyongásnál

több állat is ehhez hasonló stratégiával kutak a táplálék után (pl: albatrosz)

ez hatékony módszer, különösen, ha a táplálék is fraktál eloszlású

részvényárfolyamok fluktuációja



- Gauss-el.: ha teljesen véletlenek a befolyásoló tényezők \rightarrow "bolyongásra visszavezethető"
- valódi piac: Levy - bolyongással jobban modellezhető, hatványgyv. lecsengésű a vége

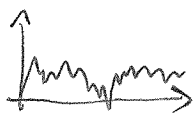
önaffin fraktálok

nem összehasonlítható az eddigi értelemben

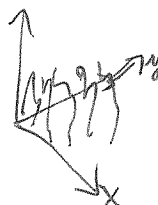
most a hosszakat irányfüggő faktorokkal kell skálázni

gyv.: egyértékű hozzárendelés

fraktálgyv.: \exists egy kitüntetett irány (által. a függőleges), amire máshogy skálázódik



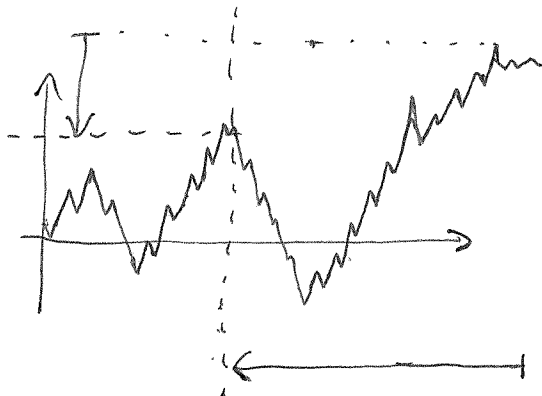
v. hegyléc:



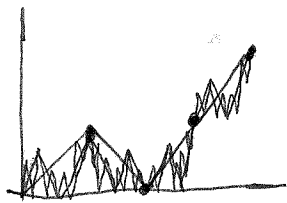
fraktál - felület

x - y síkban ált. izotrop

ha $F(x) \approx b^{-H} F(b \cdot x)$, $H > 0$, és $F(x)$ egyértékű, seholsem deriválható \rightarrow önaffin



determinisztikus önaffin fraktál:



- 1. lépés
 - 2. lépés
 - 3. lépés
 - ...
- függ.: irányba felére, vízsz. $\frac{1}{4}$ -re vízsz.

∞ finom \rightarrow \forall pontjában törés, sehohsem lesz deriválható

sok kis lépés véletlen irányba \rightarrow stoch. önaffin fraktál lesz (ekkor lesz akár deriválható is)

\downarrow
v. fel, v. le \rightarrow 1D Brown-mozgás (bolyongás) $x(t)$ fgv.-e

vez. rulettén a nyert összeg F , ha mindig visszara tesszük

nyeres: ha $F > 0$, vesztes: ha $F < 0$

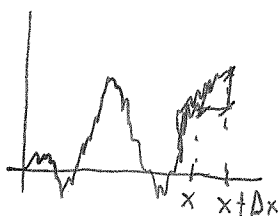
nullahelyek eloszlása: $D_{A \cap B} = D_A + D_B - d = 0,5 \rightarrow$ fraktál eloszlás

\downarrow
nyeresi - vesztes sorozatok határa

$1,5$	1	2
\uparrow	\uparrow	
önaffin fraktál	vízsz. tengely	

\downarrow
nincs nyereső stratégia a rulettén

ekvivalens definíció: $\langle |F(x+\Delta x) - F(x)| \rangle \sim \Delta x^H$ $0 < H < 1$

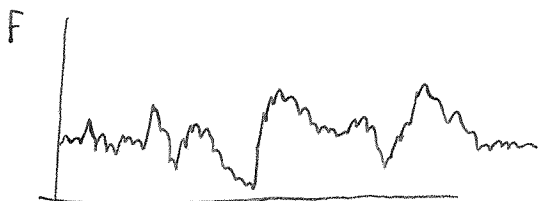


$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \Delta x^{H-1} \rightarrow \infty, \text{ ha } H < 1 \rightarrow \text{sehohsem differenciálható}$$

lokális és globális dimenziók:

pl: úttest felülete: his \emptyset (1mm - 1mm) skálán összesen változik, fraktáloszerű



de: F bizonyos körülmények között nem lép át, nem igazi fraktál

Hfr. $\Delta F \sim \Delta x^H$

(skálaválasztás) ha $\Delta x \ll 1$: $\Delta F > \Delta x$, $H < 1$ lesz \rightarrow lokálisan "szőrös" fgv.

ha $\Delta x \gg 1$: $\Delta F < \Delta x$, $H > 1$ lesz

x_c : $|F(x+x_c) - F(x)| \sim |x_c|$ karakterisztikus hossz, itt vált a 2 viselkedés

x_c : átmeneti hossz

pl: 1D folyongsó részecske

(v. több dim. részecske folyong, vetülete 1 tengelyre, ez is folyong, de nem pont úgy.

mint az 1D részecske, pl: részecske ugrhat a tengelyre \mathbb{R} -en, ekkor nincs elmozdulás a vetületben)

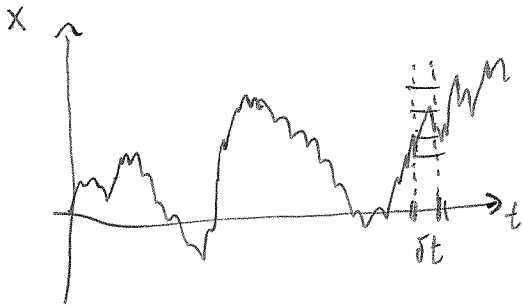
véletlenszerűen változtatjuk az irányt, (nem feltétlen 0.5-0.5 valószínűs. -gel, pl. ha az irány valószínűs. függ a múlttól is)

$$\langle X_H^2(t) \rangle \sim t^{2H}$$

$H = \frac{1}{2}$: Brown-mozgás

$0 < H < 1$, $H \neq \frac{1}{2}$: ~~fraktál~~ ^{fraktál} Brown-mozgás

mi a fraktál Brown-mozgás fr. dim.-ja?



dobozok száma, amik átfednek a fraktállal: egy oszlophoz $\frac{\delta t^H}{\delta t}$ doboz kell, mert $|\Delta x| \sim \delta t^H$

$\frac{1}{\delta t}$ db. oszlop van (ílt: $\frac{1}{\delta t^{d-1}}$ db. oszlop kell)

$$\Rightarrow N(\delta t) \sim \frac{\delta t^H}{\delta t^d} = \delta t^{-(d-H)}$$

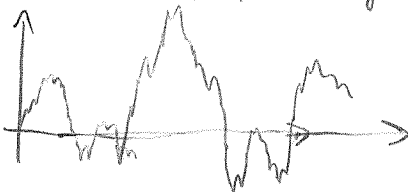
$$\Rightarrow D_B = d - H \quad (D_B: \text{box-dimenzio})$$

ílt.: $D_B = d - H$, ahol d a behyázási dim.

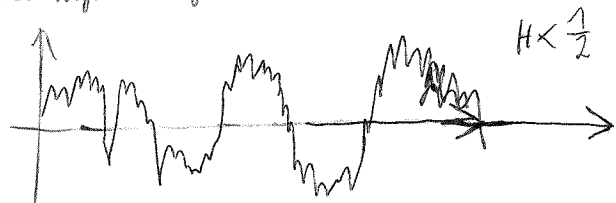
$X_H(t) = 0$: zéró-halmaza a Brown-mozgásnak

ez egy véletlen Cantor-halmaz, $D = 1 - H$ dim.-val

$H > \frac{1}{2}$: az ugrások korreláltak az előző ugrás irányával



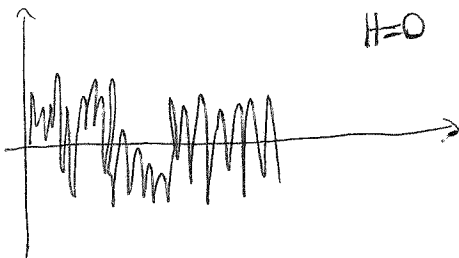
$H > \frac{1}{2}$



$H < \frac{1}{2}$

$H > \frac{1}{2}$: közelebb van a vonalhoz, vonalra $H = 1$

fehér zaj:



$H = 0$

$H > \frac{1}{2}$: percolációs fraktál, pozitív korreláció van az ugrások irányja között

előző lépés \uparrow : mostani lépésre $r_{\uparrow} > r_{\downarrow}$

előzővel korrelál \rightarrow a korábbiakkal is

$H < \frac{1}{2}$: antipercolációs, negatív korreláció

előző $\uparrow \Rightarrow r_{\downarrow} > r_{\uparrow}$

$H = \frac{1}{2}$: nincs korreláció, Brown-mozgás $r_{\uparrow} = r_{\downarrow}$

Biz: legyen $X_H(0) = 0$, ~~$X_H(t)$~~ $-X_H(-t)$ múltbeli növekmény
 $X_H(t)$ jövőbeli " "

Korrelációjuk: $\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X_H(t) - X_H(-t)]^2 \rangle - 2 \langle [X_H(t)]^2 \rangle \} = \frac{1}{2} (2t)^{2H} - t^{2H}$ $\therefore \langle X_H^2(t) \rangle = t^{2H}$

\uparrow
 $\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim \Delta x^{2H}$, és $\langle X^2(\Delta t) \rangle \sim \Delta t^{2H}$
 \parallel
 $\langle (X(t+\Delta t) - X(t))^2 \rangle$

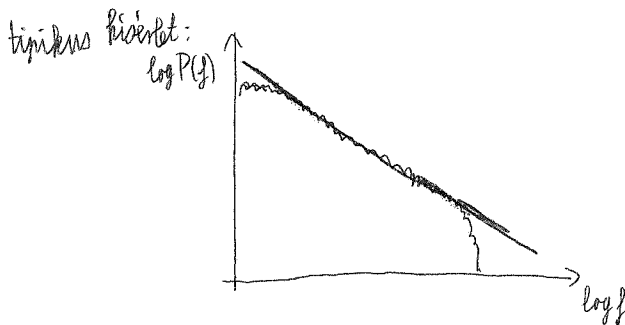
$$\frac{\langle -X_H(t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1 \quad \text{időtől független korreláció}$$

korreláció nem cseng le!

Fourier-spektrum

véletlen, önálló-jyv. szerű jel Fourier-spektruma

f : frekv., $A(f)$ előjele változhat, $|A(f)| \sim f^{-H-\frac{1}{2}}$



$P(f)$: teljesítmény-spektrum, $P(f) \sim A^2(f)$

pl: törsdén $H \approx 0,55 \rightarrow$ van egy kis korreláció, de nem elég a meggazdagodáshoz

pl: Weierstrass-Mandelbrot fgv. (1872)

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{l^{(2-D)n}} \quad \text{fraktálfgv.}$$

$$1 < D < 2, \quad b > 1$$

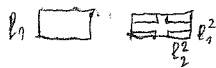
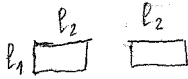
$C(t)$ folytonos, de $\frac{dC(t)}{dt}$ divergál mindenhol

$$n \mapsto n+1 \text{ helyettesítés} \Rightarrow C(t) = l^{-(2-D)} C(bt) \Rightarrow \text{önaffin fgv.}$$

$\cos(b^n t)$ tagok \rightarrow nincs felső frekv.

$$\frac{1}{l^{(2-D)n}} \rightarrow \text{lessegtő amplitúdó, hatványfgv.}$$

pl: 2 Cantor-halmaz szorzata is önaffin fraktál, ha $l_1 \neq l_2$



$$l_1 < l_2$$

$$D_1 = \ln 2 / \ln(1/l_1) \text{ és } D_2 = \ln 2 / \ln(1/l_2) \Rightarrow D_L = \frac{\ln 2}{\ln(1/l_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/l_2)}$$

hisz rész-halmaz: elnyúló, önaffin fgv.-val definiált az egész fraktálra visszahívja az eredeti fraktált

Kövér fraktálok

eddig: $D < d$

def.: térf. mérése, hatványfgv. szerint változik a doboz méretével

eddig: $\rightarrow 0, \infty \rightarrow \infty$, de tarthat hatványfgv. szerint egy véges számhoz is

$$V(l) = V(0) + f(l)$$

$V(0) = V_0$: térfogat az $l \rightarrow 0$ határesetben

~~$f(l)$~~ ronds fraktálokra $V_0 = 0$

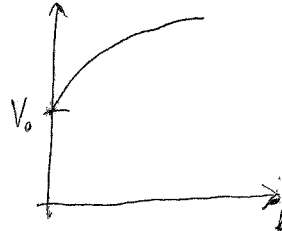
$$\text{és } f(l) \sim l^{d-D}, \quad D < d$$

$$V(l) \approx V(0) + A \cdot l^\beta$$

$$\beta = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln[N(l)l^d] - \ln V(0)}{\ln l}$$

$\beta > 0$, és $\beta = \infty$ nem-fraktál halmazoknál

$N(l)$: d -dim. labák száma, amikkel lefedjük a fraktált

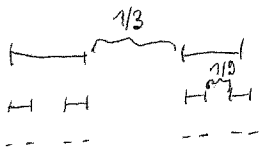


nem-fraktál: exp. tartáshoz

Keeno-görbe nem kövér fraktál

pl: módosított Cantor-halmaz

Cantor-halmaz:



$\forall n \geq 1/3$ -át szedjük ki

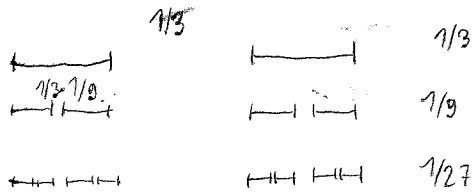
a kivett szakaszok hossza $\rightarrow 1$

\downarrow

0 a hossza

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = 1$$

módosított:



részel veszünk ki

a kivett szakaszok hossza $\neq 1 \rightarrow$ véges hossza lesz

\downarrow

$$D = d = 1$$

topologikailag ugyan, mint a Cantor-halmaz, a végén \forall szakasz hossza 0

a kövér fraktál nem önhasonló

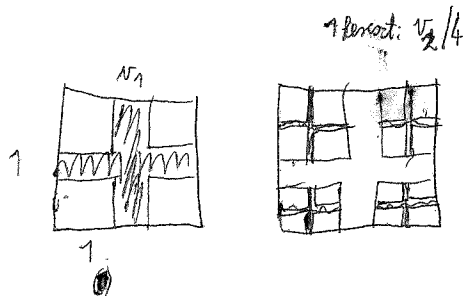
általában:

d dim. hiperkocka, egységnyi élhossz

kivágunk v_1 tézf. "keresztet"

\downarrow

a maradék kockákból v_2 térfogatot



$$\text{a maradék térfogat: } V_k = (1-v_1)(1-v_2)(1-v_3)\dots(1-v_k) = \prod_{i=0}^k (1-v_i)$$

$$V_k \rightarrow V, \text{ ha } k \rightarrow \infty$$

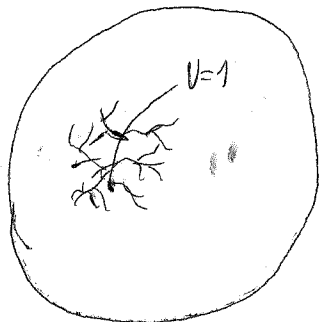
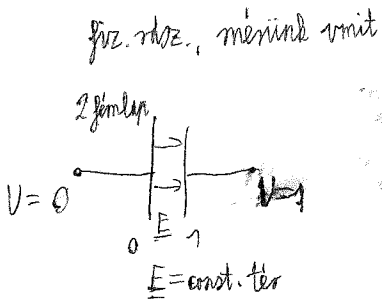
$$\text{Ha } \sum_0^{\infty} v_k < \infty \Rightarrow \prod_0^{\infty} (1-v_k) > 0$$

Fraktál mértékek (Multi-fraktalok)

tfh. \exists egy α hasonló fraktál, ennek pontjaihoz hozzárendelünk egy skalárt (\sim skálázási)



bonyolultabb lesz, mint egy fgv.



vezető fraktál

$E = ?$

$E = \text{grad } U$

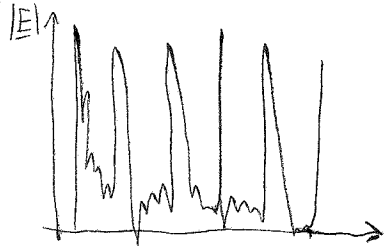
csúcsokhoz \Rightarrow csúcsoknál $E = \text{grad } U \rightarrow \infty$

hővezetés, koncentráció, elektr. tér \rightarrow Laplace-egyenlet

2D, Laplace-egy. megoldás szemléletesen:

gumihártya a peremre, a fraktál mentén megemelés \rightarrow a gumihártya alakja lesz a Laplace-egy. megoldása, csúcsoknál ∞ meredek lesz

$|E|$ eloszlása a fraktál mentén:



van, ahol 0, van, ahol ∞

sehol sem lesz folytonos \rightarrow nem fgv.

hanem mérték lesz

mérték: A halmazé, ~~(A)~~ a mértéke μ_A

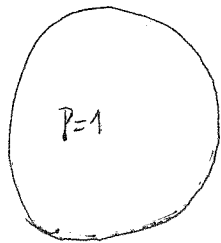
$\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B$, ha $A \cap B = \emptyset$

ilyen pl: tömeg, valószínűség

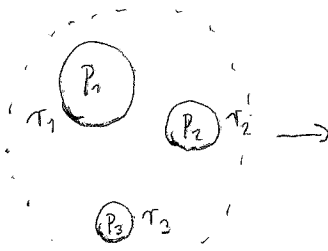
normális: $\int_F \mu \, d\mu = 1$ az egész tartományra

Multifraktál

pl:

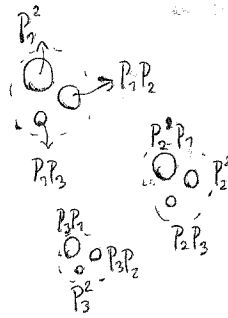


1 mértéket rendelünk hozzá



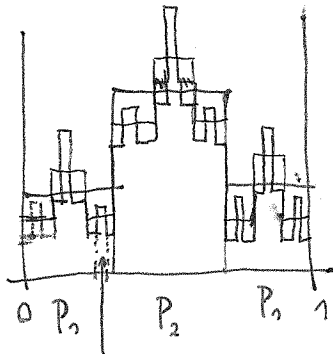
P_1, P_2, P_3 mértékkel

és $P_1 + P_2 + P_3 = 1$



03.29.

pl:



multiplikatív folyamat

$2P_1 + P_2 = 1$

fraktál mérték lesz,

de a tartója nem fraktál, hanem a $[0, 1]$ szakasz

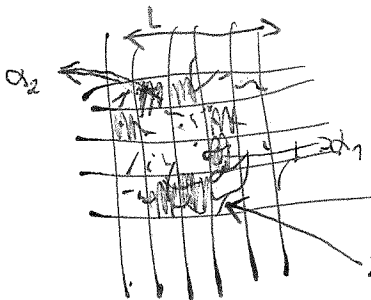
pl: P_1, P_1, P_2 lesz a területe

a végén minden n -teljesen vagy 0 , vagy ∞ (különböző ∞ -ek lehetnek)

$P_1 < P_2, k \gg 1 \rightarrow P_1^k \gg P_2^k$

k lépés után $P_1^k \cdot P_2^{k-l}$ tagok jönnek be

d dim. l hosszú dobozokkal lefedünk egy fraktált (ami a tartója a mértéknek)



i . dobozhoz n_i mérték tartozik ($\sum_i n_i = 1$)

$\epsilon_i = l/L, \epsilon \rightarrow 0$ (azaz $l \rightarrow 0$ vagy $L \rightarrow \infty$)

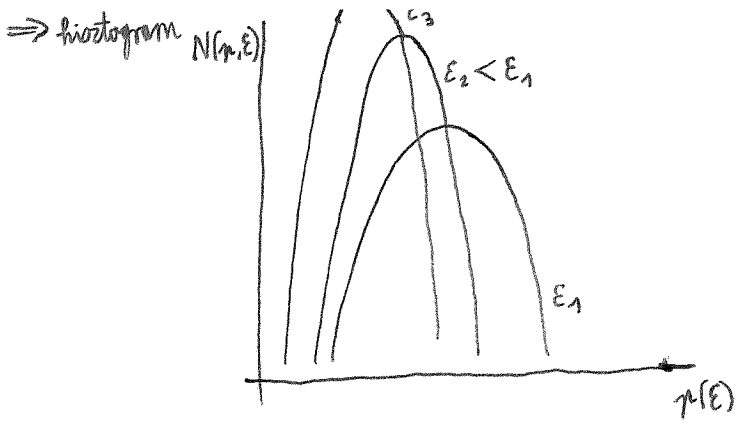
$n_i(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha_i}$

folyt. fgr.: $n(\epsilon) \sim \epsilon$, vagy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fgr.-nél $n(\epsilon) \sim \epsilon^2$

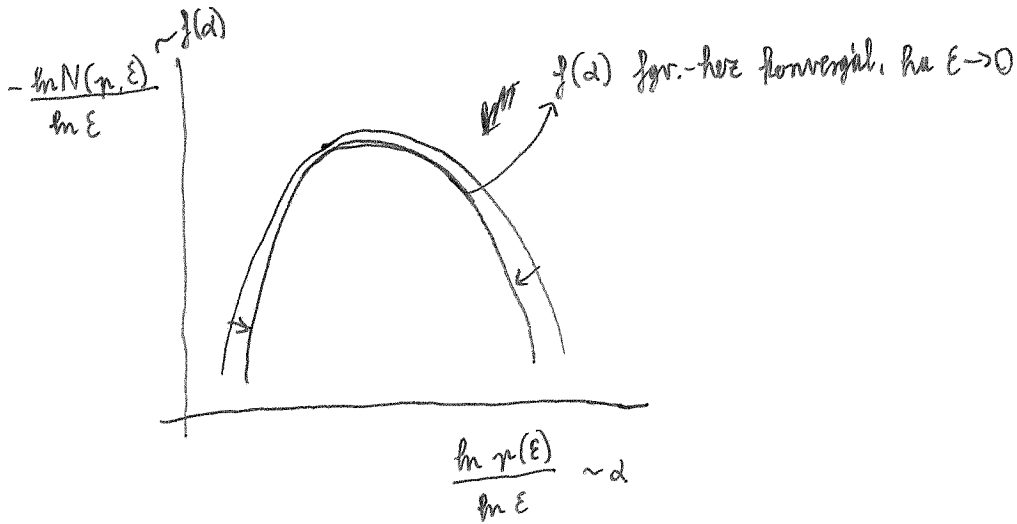
ált. egy adott α -hoz több doboz tartozik, azaz növekszik azon dobozok száma, amikre $n_i \in [\alpha, \alpha + d\alpha]$

multiplikatív folyamat: $N_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-d(\alpha)}$ (1)

α kitevőjű dobozok száma



multifraktálra így néz ki



áll.: $\forall \epsilon \exists \alpha \in f(\alpha)$ fgr. $\forall \epsilon$, mint $f(\alpha)$ (1)-ből kifejezve
 csak azt hívjuk multifraktálnak, ahol \exists egy nemtriviális fgr.

folyt. fgr. → $\epsilon \rightarrow 0$ esetén egy pontot kapunk

$$r, \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \ln r, \ln \epsilon \rightarrow -\infty, \text{hányadosuk véges}$$

$$\text{szórása véges marad} \Rightarrow \text{val. szim.-gek szórása} \rightarrow 0$$

multifraktál: ahogy a dobozmérete $\rightarrow 0$, a val. szim.-gek szórása $\rightarrow \infty \Rightarrow$ nem egy pontot kapunk

$\exists f(\alpha)$ fgr. \Rightarrow (1) alapján $\forall \epsilon \alpha$ különböző dobozok egy $f(\alpha)$ dim. fraktálon helyezkednek el

multifraktál: ∞ sok (fraktál) alfraktál uniója, ∞ sok különböző dimenziójú alfraktált
 jelöl ki $\forall \epsilon$ eloszlás

sok fraktál uniójának dim.-ja a legmagasabb dim. fraktál dim.-ja $\Rightarrow D = \max_{\alpha} f(\alpha)$
 $f(\alpha)$: spektrum

Multifraktál formalizmus

def.: eloszlás q -dik momentuma: $\chi_q(\epsilon) \equiv \sum_i p_i^q$ $-\infty < q < \infty$ -re

$q=0$: $\chi_0 = N(\epsilon)$, mert $0^0 = 0$, $p_j \neq 0$ -ra $p_j^0 = 1$

$\chi_0 = N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$ (D : a ~~fraktál~~ fraktál dim.-ja)

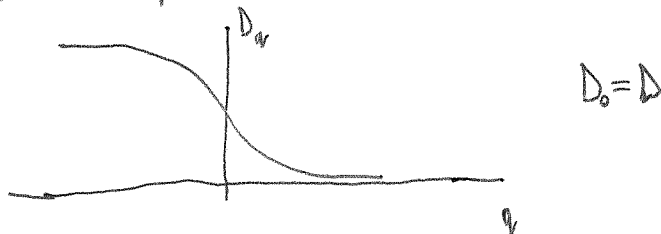
$\chi_1(\epsilon) = 1$, mert normált az eloszlás

$\epsilon \rightarrow 0$: $\chi_q(\epsilon) \sim \epsilon^{(q-1)D_q}$ ez is lehetne a multifraktál def.-ja

D_q : nem-triviális q függő lenne marad $\epsilon \rightarrow 0$ esetén is

$(q-1) \rightarrow 0$ választás $\rightarrow \chi_1(\epsilon) = 1$ teljesen automatikusan

feltételek: $\forall q$ -ra $D_q \geq 0$, és D_q monoton csökken q növekedésével



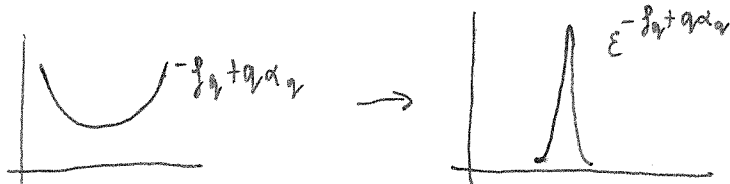
normál fraktál: $\forall D_q = D$

$\chi_q(\epsilon) = \sum_i p_i^q$, $\epsilon \rightarrow 0$: a legtöbb járuléka egy f_q dim.-ös alfraktálból jön

$N_q(\epsilon) \sim \epsilon^{-f_q}$, és ezekre $(p_i \equiv p_j)$ vez. a p_i legyen ez p_q

és $\chi_q(\epsilon) = \sum_i N_q(\epsilon) p_q^q + \text{többi doboz járuléka} \approx N_q(\epsilon) p_q^q(\epsilon)$

$N_q p_q^q \approx \epsilon^{-f_q + q\alpha_q}$, és maximuma van, ha $\epsilon \rightarrow 0$, $-f_q + q\alpha_q$ minimumánál



egyszerű fraktálra $f_q = \alpha_q = D$

$$X_q \approx N_q(\varepsilon) p_i^q \sim \varepsilon^{-f_q + q\alpha_q} \quad \Rightarrow \quad (q-1)D_q = q\alpha_q - f_q \quad (*)$$

és $X_q \sim \varepsilon^{(q-1)D_q}$ összefüggés az exponensek között

$$\Rightarrow D = D_0 = f_0$$

f véges $\Rightarrow D_{\pm\infty} = \alpha_{\pm\infty}$

$$X_q(\varepsilon) \sim \int_{\alpha_{\infty}}^{\alpha_{-\infty}} \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha \leftarrow \text{def. átírva } \Sigma \text{ helyett }] \text{-al, } p_i \sim \varepsilon^{\alpha_i}, N(n, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)} \text{ felhasználásával}$$

$\varepsilon \ll 1$: az f -t az α tag dominálja, ahol α minimalizálja az exponenst \Rightarrow

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} [q\alpha - f(\alpha)] \right|_{\alpha_q} = 0, \quad \alpha_q \text{-re minimalis } q\alpha - f(\alpha),$$

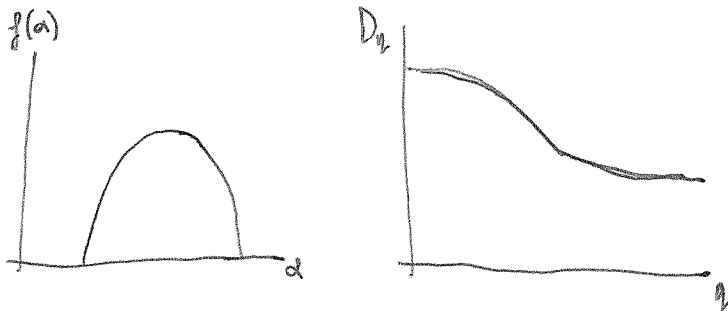
és $f_q = f(\alpha_q)$, mert ekkor konvexitása az f és a Σ felhívó

és $(*) \Rightarrow \alpha_q = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]$

04.19.

és f_q, α_q ismeretében $f(\alpha)$ is meghatározható $f_q = f(\alpha_q)$ -ból

megj.: D_q és $f(\alpha)$ egymás Legendre-transzformáltjai

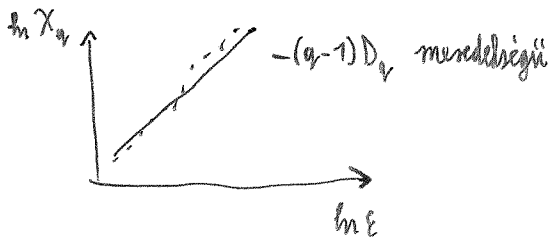


kiegészítő adatok kiértékelése:

dobozok, dobozokra p_i súlyok (mérték)

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln \varepsilon} \right]$$

$$D_q \Rightarrow f(\alpha) \text{ num. deriválással}$$



$$q = 1 - \epsilon:$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum p_i^q}{(q-1) \ln \epsilon} =$$

$$D_0 = D_1, \quad \chi_1 = 1 /$$

$q=1$ -nél numeró 0 \Rightarrow határértékét vesszünk

$$\stackrel{\text{L'Hospital szabály}}{=} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{d/dq \ln \sum p_i^q}{d/dq [(q-1) \ln \epsilon]} = \dots \Rightarrow - \sum_i p_i \ln p_i \sim D_1 \ln(1/\epsilon)$$

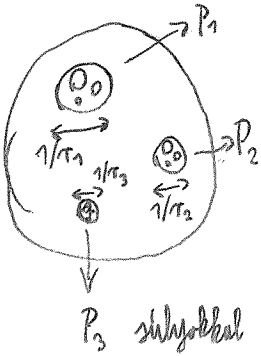
L'Hospital szabály

olyan alakú, mint a Shannon-féle információ definíciója
 p_i eloszláshoz rendelt információ

D_1 : információs dimenzió

tétel: egy (fraktál-tartíj) eloszlás $D_1 < D$ -re multifraktál.

Rekurzív fraktál mértékek (determinisztikusan konstruált)



$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_1^m P_2^n P_3^{k-n-m} \text{ alakú süllyek}$$

az egyes affraktálok egymáshoz itshálíthatók, v. az egész is megkapható helyük

$$\chi_{q,j}(\epsilon) = \sum_i p_{i,j}^q = \underbrace{P_j^q}_{\text{relatív süllyek skalárja}} \underbrace{\chi_q(\epsilon \cdot \tau_j)}_{\sim \epsilon^{-(q-1)D_q} \text{ (lásd 9.2)}} \text{ térbeli skalárja}$$

$$\text{és } \chi_q(\epsilon) = \sum_{j=1}^n \chi_{q,j}(\epsilon) \quad / \text{összesen } n \text{ affraktál} /$$

$$\Downarrow \sum_{j=1}^n P_j^q \tau_j^{-(q-1)D_q} = 1 \quad \text{implicit egyenlet } D_q \text{-ra}$$

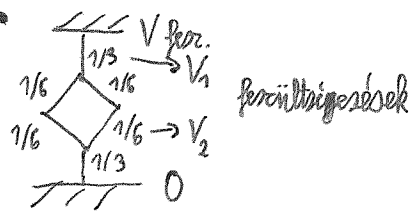
ha $\forall \tau_j = \tau$:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln \left(\sum_{j=1}^n P_j^q \right)}{\ln(1/\tau)} \quad \text{megoldás}$$

ha $\forall P_j = P$: nem lesz multifraktál

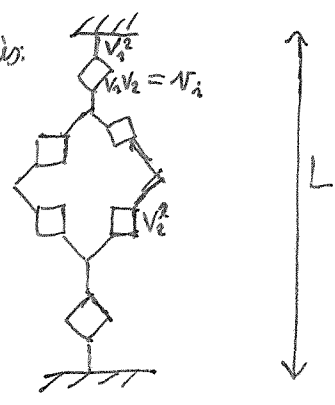
pl 1: növekvő ellenállás-hálózat

1. lépés



az összes feszültséget összeadva nem normált normált lesz $V_0 = 3/4$ esetén

2. lépés:



v_i feszültségek az egyes ágakon
 $L = (l/\epsilon) 3^R$

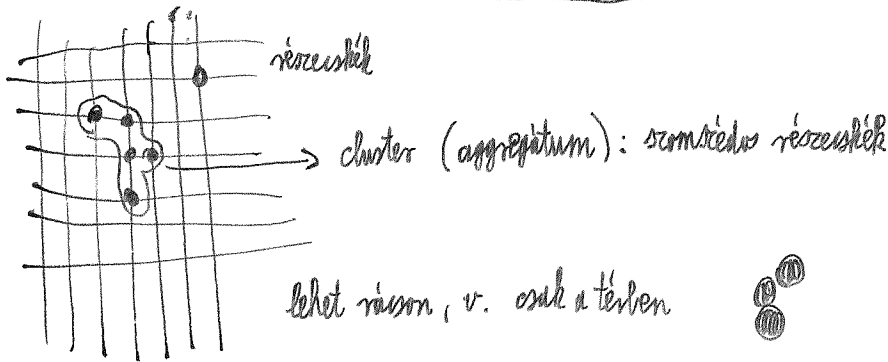
$$\sum_i v_i^q \sim L^{-(q-1)D_q}$$

$$\sum_i v_i^q = \sum_m N_m v_m^q = (2V_1^q + 4V_2^q)^R$$

$$N_m = 2^{R+m} \binom{R}{m} \text{ és } v_m = V_1^{R-m} V_2^m \quad (0 \leq m \leq R)$$

$$\Rightarrow D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln [2(\frac{1}{3})^q + 4(\frac{1}{6})^q]}{\ln(1/3)}$$

Lokális növekedési modellek



clusterhez meg kell adni, melyek szomszédos részecskék: 1. szomszéd
2. szomszéd: ezt is belevehetem a clusterba

ált. stochasztikusan növekszik, az új részecske adott val. sán. szint körül alakul

szabály már meglévő cluster

↓
 ≠ lehetséges cluster létrejöhet minden val. sán.-gel

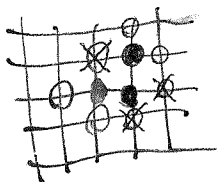
de mindig van (egy) a modellre jellemző tipikus cluster, sokféle tipikus cluster lehet

növekvő perkoláció

mag részecske, a szomszédos üres helyek a betölthető helyek (elői helyek)

véletlenszerűen választunk egyet, - p val. sán.-gel betöltjük

- (1-p) -vel meghal → önmaga bízójuk a betöltéséről



hisz p: néhány lépés után beáll

p=1: mindig betöltöm → egy paca lesz

p<1: erdőben a faon fertőzés terjedése

v. ismerem hágyás,

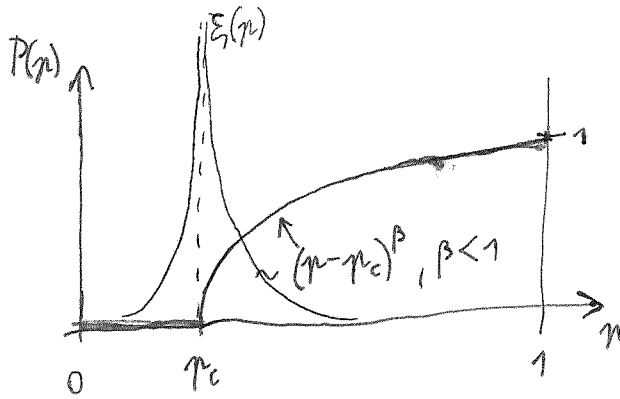
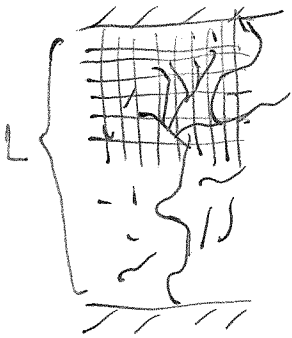
Lényegében azaz, mint az egyensúlyi perkoláció: ≠ rácspontra betöltés p val. sán.-gel, összes rácspontra vél. sán. sorozása

a növekedés végén azaz lesz a tipikus cluster, mint az egyensúlyinál

$P(p)$: val. sim., hogy egy kiválasztott pont egy ∞ klaszterhez tartozik (ha $L \rightarrow \infty$)

lényegében vez: mekkora a ∞ klaszter sűrűsége?, a rész. \forall pontjainak mekkora hányada tartozik hozzá?

(Mészáros)



növekvő perkoláció: 1 klaszter van \rightarrow arányos hasonlítóhoz a "normál" perkolációval meg kell szabadulni a többi klaszterrel folyt. fázisátalakuláshoz hasonló

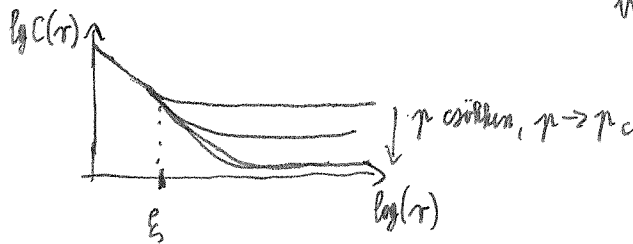
ξ : korrelációs hossz, a legnagyobb perkolációs klasztere

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

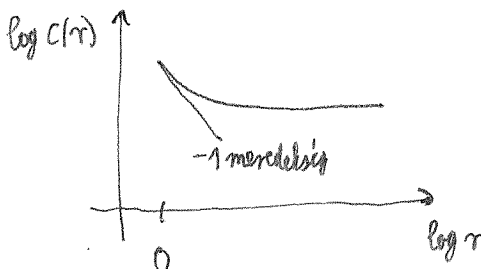
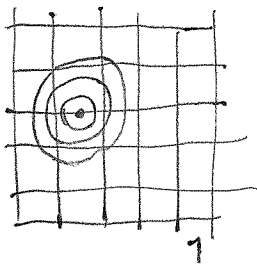
ξ -nél a korr. függ. hatványfügg. - szerű lecsengése átmeny konstansok

a ∞ klaszter p_c -nél fraktál, $p > p_c$ -re már nem, mert van véges területe is

\downarrow
 kis tartományon \sim fraktál, nagy tartományon \sim homogén,
 van egy átlagos sűrűsége



pl: négyzetűes korrelációs függvénye (élek + rácspontok)



$$C(r) \sim r^{-d} \sim r^{-(d-D)}$$

négyzetűes: kis skálán \sim vonal $\rightarrow D=1$

nagy skálán \sim sík $\rightarrow D=2$

a: rögzített

feltételek: $\xi \gg a$, $r \gg a \Rightarrow c(r)$ csak ξ -től (és ν -tól) függhet, a -tól nem

$c(r) \sim P(\nu) \cdot f(r/\xi)$ alakú \leftarrow invariancia, skálázás

$f(x)$: skálázó, $f(x) \rightarrow \text{const}$, ha $x \rightarrow \infty$

$x \ll 1$: $c(r)$ független ξ -től $\Rightarrow f(x) \sim x^{-\beta/\nu}$,

mert: $\nu - \nu_c \sim \xi^{-1/\nu}$ és $P(\nu) \sim (\nu - \nu_c)^\beta \sim \xi^{-\beta/\nu}$ \Rightarrow

$\Rightarrow c(r) \sim r^{-\beta/\nu}$ $r \ll \xi - r_c$

fraktál dim.: $D = d - \alpha = d - \frac{\beta}{\nu}$

2D egyensúlyi perkolációs állapotra ez egyáltalán ismert:

$$\nu = \frac{4}{3}, \quad \beta = \frac{5}{36}, \quad \nu - \nu_c \text{ nál } D = \frac{21}{48} \approx 1,896$$

Invariáns perkoláció

folgyadékos porózus közegekben (pl: szivacs) modellezésére

- i) véletlen számokat (0-1 között) előre kiszámolunk egy rész pontjain
- ii) van egy kiinduló részecske v. felület
- iii) a legközelebbi véletlenszámmal rendelkező határpontot betöltjük

nagy számi pont \rightarrow ált. betöltetlen marad nagyon sokáig,

az újonnan betöltött pontok mellett ált. lesz kisebb számi is

elindul, megáll az egyik részen, máshol növekszik, ...

nem ekvivalens az egyensúlyi perkolációval, de nagyon hasonlít ahhoz
ez is fraktálhoz vezet

Véletlen bolyongás

rácson bolyong egy részecske, ennek az útját vizsgáljuk

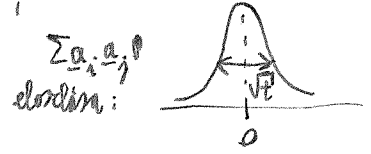
az út 2 végpontjának átlagos távolsága: $\langle R_0^2(t) \rangle = R_0^2(t)$

$$R_0(t) \sim t^\nu \quad \text{és } D = \frac{1}{\nu} \text{ a lénc fraktál dim. ja}$$

$\nu = \frac{1}{2}$ ← diffúziós mozgásnál a térbeli kiterjedés $\sim \sqrt{t}$,

$$\langle R_0^2(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^t \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle = a^2 t + 2 \sum_{i>j} \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle \sim t$$

↑
ha $i=j$



~~az \underline{a}_i és \underline{a}_j függetlenek, $(\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j) \Rightarrow \sqrt{t}$,
t-mel lassabban növekszik $\Rightarrow a t$~~

vizsgáljuk az önmetró bolyongás:

$$\underline{R}_e(t) = \sum_{i=1}^t \underline{a}_i, \quad \text{ahol } \underline{a}_i \text{ vektor 'a' hosszú (a = másállambó), } z \text{ lehetséges irányja van (z: koordinációs szám)}$$

Önellkerülő bolyongás (TSAW = true self-avoiding walks)

pl: polimerlánc

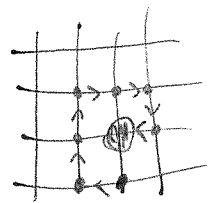
nem metrózheti önmagát \Rightarrow zsákutcába kerülhet

1. közelítésben emiatt: $i \rightarrow j$ (szomszédos) nyíró val. szám. - e:
$$p_{ij} = \frac{e^{-g_{ij} n_{ij}}}{\sum_{k=1}^z e^{-g_{ik} n_{ik}}}$$

g_{ij} : paraméter, mennyire nem metrózi magát

n_{ij} : ahányszor a k rácsponton már \underline{a}_i jöttünk

preferálja az ~~(önmetrózást)~~ önellkerülést, leginkább $g_{ij} \rightarrow \infty$ esetén,
de még akkor is metrózheti önmagát, pl:



elől a csapdából ki tud jönni

$t \rightarrow \infty$: úgy viselkedik, mint az önmetró bolyongás

Növekvő önellenlő bolyongás (GSAW = growing SAW)

polimer láncok növekedésének modellje

n szabad szomszéd $\Rightarrow r = \frac{1}{n}$ val. szim.-gel kiválaszt egy betöltetlen szomszédos rácspontot, azt betölti

ha csapdába esik, leáll

megoldás: a csapdát előre felismeri és elkerüli (IGSAW = indefinitely GSAW)

ehhez elég csak egy kis környezetet vizsgálni

leírjuk $(V$ -környék), hogy hányszor ^{fordultunk} mentünk balra (n_L) és jobbra (n_R), ez a

~~feltételezési számok~~, $n_L - n_R =$ feltételezési szám,

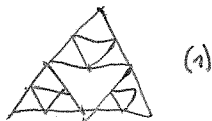
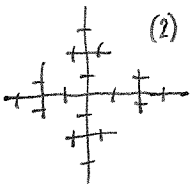
ez és a lokális konfiguráció elég a csapdák elkerüléséhez

$$\text{enne } D = \frac{7}{4} = 1,75$$

↑
IGSAW "megfeleltethető" egy parabolikus fluktuáció peremén (vagy szomszédos rácspontok), kívül kell maradni) való bolyongásnak perem soha nem esik csapdába

Bolyongás fraktálon

(ált. csak önmetszést vizsgálunk)



hurokmentes és hurokos fraktálon más a terjedése

$$R_0^2(t) \sim t^{2/d_w}$$

megj.: $R_0^2(t) \sim t$, \forall egész dimenzióban \sqrt{t}^2 -vel megy a diffúzió

d_w exponens a fraktál szerkezetétől függ, ált. $d_w > 2$

$t \sim R_0^{d_w}$, d_w fraktál dim.-hoz hasonló, a tömeg skálázását írja le, nem a pályák fraktáldim.-ja

$$\text{ált. } d_w > D$$

pl: Sierpinski-szűrőre (1): $d_w = \frac{\ln(d+3)}{\ln 2} > \frac{\ln(d+1)}{\ln 2} = D$
d dim.-ban

(2)-re: $d_w = D+1$

növekedési folyamat, nem-lokális mérők (pl: hőmérséklet) irányítják

tipikusan: Laplace-egy., mozgó peremfeltételekkel

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}^2}$$

(koncentráció, hőmérséklet, elektr. potenciál, ...)

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0 \quad \text{Laplace-egy.}$$

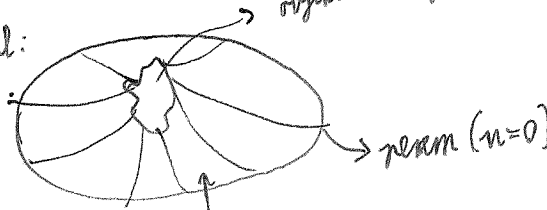
sok növekedési jelenséget ez ír le
megoldásai: harmonikus függvények
nem lokálisan a megoldások

u : tér jellegű mennyiség \sim részecske szám

$\nabla u \sim$ növekedési sebesség, ~~az~~

∇u hajtja a növekedést

pl: objektum, magasság (pl: $u=1$)



gumihétyű felülete: alakja függ a központi objektumtól,
ha az változik, mindenhol megváltozik a tér

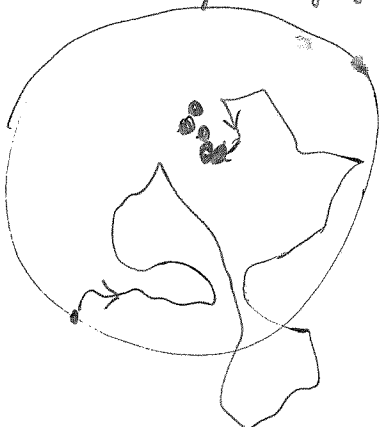
Diffúzió - limitált aggregáció (DLA)

1981, Witten és Sander

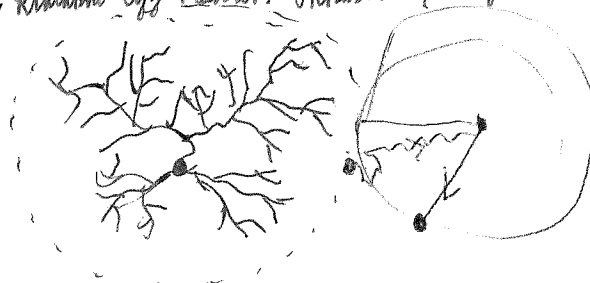
pl: elektrolit, \oplus fémionok kis koncentrációban, \ominus elektród az elektrolitben

modell: van egy magrészecske

mészről elindítunk egy másikat, véletlenül bolyong, amikor elér a magot, odatapsz
újabb bolyongó részecske, ...



végül kialakul egy klaszter: önhasznált, előgyári struktúrát hoz létre



stimuláció trükkök: - a részecskét egy, a klasztert éppen körülvevő körrel indítjuk

- ha messze kerül a körrel \rightarrow kör-részecske távolsága sugár körön véletlenül elhelyeződik

- ha nagyon messze kerül \rightarrow új részecske

- bookkeeping: rácsot tesszük a klaszter köré, \forall rácspontra megvan, hogy milyen messze van a fraktáltól \rightarrow akkor sugár kör belül tesszük véletlencsén

$$N(R) \sim R^D$$

2 dim.-ban $D \approx 1.7$

horr. jvr.: $c(r) \sim r^{-\alpha} \Rightarrow \alpha \approx 0.29$ ($D = d - \alpha \approx 1.71$ ~~(≈ 1.7)~~) ≈ 1.7 ✓

magasabb dimenzióban: $d-1 < D < d$

átlagter. főcellés jelölés: $D = \frac{d^2+1}{d+1}$ viszonylag közel van

alsó becslés: $D > d-2$, mert:

D dim. fraktál, növekedés } ha 2-2 a kettő metron egymást, akkor van növekedés
2 dim. halmazok (mások fraktál)

metron dim.: $D_n = D + 2 - d > 0$, hogy legyen növekedés

\Downarrow
 $D > d-2$

d	D
2	1,71 ± 0,02
3	2,53 ± 0,06
4	3,31 ± 0,10
5	4,20 ± 0,15
6	5,3

viszák: - rácson / nem rácson DLA
növekedés

alapszám: nincs rács

egyensúlyi stat. fiz.: mindegy, hogy milyen rács v. nincs rács elsősorban fraktáldimenziónál (← universalitás)

növekedésnél nem mindegy, a rács anizotropiája miatt most kapunk

- a halmazok réceske p val. szim.-gel talál oda, $(1-p)$ -vel továbbmegy

\Downarrow
sűrűbb lesz a klaster, több réceske jut be a "völgyekbe"

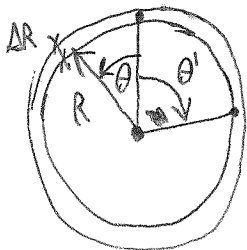
vastagabb ágai lesznek, de ugyanaz lesz a fraktáldim.-je, mint a sima DLA-e ($D = 1.71; d = 2$ -ban)

szimmetria a DLA-ban

klaszter kontroll felek n \Rightarrow sug \rightarrow ir \rightarrow ny \neq tangenci \rightarrow ir \rightarrow ny nem elv \rightarrow alans

$$C_R(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{\theta'} S_R(\theta + \theta') S_R(\theta') \quad \text{tangenci \rightarrow alis s \rightarrow ir \rightarrow nykorrelacio}$$

N: aggregatum r \rightarrow ecsesk \rightarrow inek s \rightarrow ama



$S_R(\theta) = R$, R r \rightarrow ecseske van egy $R \Delta R \Delta \theta$ dobozban (R, θ) pont körül

numerikus ki \rightarrow teleles $\Rightarrow \theta \ll 1$ re $C_R(\theta) \sim \theta^{-\alpha_{\perp}}$, $\alpha_{\perp} \approx 0,41 \neq \alpha \approx 0,29$

nagyis mer \rightarrow leges ir \rightarrow nyban gyorsabban cs \rightarrow okken a korrelacio, mint altalaban a sug \rightarrow ir \rightarrow nyji no \rightarrow veked \rightarrow es miatt

t \rightarrow h: $c(r, \varphi) \approx S_0 r^{-\alpha_{\parallel}} \cos^2 \varphi + S_1 r^{-\alpha_{\perp}} \sin^2 \varphi$ al \rightarrow al \rightarrow a korrelacio s \rightarrow gy. (a teljes kor. s \rightarrow gy.)

$$N(a) \sim \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} c(r, \varphi) d\varphi \sim \pi a^{2-\alpha_{\parallel}} (S_0 + S_1 a^{\alpha_{\parallel}-\alpha_{\perp}})$$

r \rightarrow ecsesk \rightarrow ek s \rightarrow ama egy a sug \rightarrow ir \rightarrow ny k \rightarrow erben

$\alpha_{\perp} > \alpha_{\parallel}$ miatt ez cs \rightarrow okken \rightarrow j \rightarrow amellek

$$D = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln N(a)}{\ln a} = \lim_{a \rightarrow \infty} [2 - \alpha_{\parallel} + D_1(a)] = 2 - \alpha_{\parallel}$$

ahol $D_1 = \frac{\ln \pi (S_0 + S_1 a^{\alpha_{\parallel}-\alpha_{\perp}})}{\ln a}$ lassan cs \rightarrow okken \rightarrow korrelacio a skal \rightarrow arokhoz

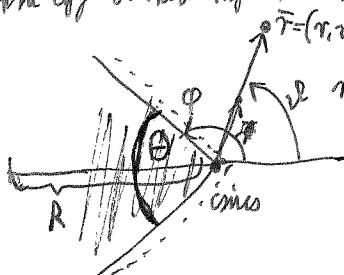
DLA elméleti megközelítés

átlagos közelítés: $D = \frac{d^2+1}{d+1}$, meglepően jól egyezik a szimulációk eredményeivel

j \rightarrow el \rightarrow leírás: elektrosztatikus analógia



cs \rightarrow isok \rightarrow kn egy burkoló rajzolható (t \rightarrow h. itt el \rightarrow kezd ∇ r \rightarrow ecseske



milyen val. s \rightarrow im.: gel van \rightarrow diffundáló r \rightarrow ecseske egy adott pontban: $\rho(\vec{r})$

a hat \rightarrow rfelületen ez a val. s \rightarrow im. már 0, mert odat \rightarrow pad

a Laplace-egy. megoldása $\rightarrow \nabla u$ divergál a cs \rightarrow isban (cs \rightarrow isok \rightarrow hat), h \rightarrow at \rightarrow ir \rightarrow nyoz \rightarrow on

\Downarrow
fraktál

$\rho(\vec{r})$ val. sim.

$\Delta \rho(\vec{r}) = 0$ Laplace-egy.

$\rho = 0$ a elektrostatikus

elektrostatika: $\rho \leftrightarrow \phi$ potenciál

$\nabla \rho(\vec{r}_0) \sim$ részecskék \vec{r}_0 -ban

$$\text{felület elterjedési sebessége} = \frac{dR}{dt} = \frac{dN/dt}{dN/dR}$$

tpn. a felület egy kör, először a térsűrűség eloszlása (konform tpf-vel):

a csúcs körül

$$\phi(r, \varphi) = C r^{\pi/(2\varphi)} \cos\left(\frac{\pi \varphi}{2\varphi}\right)$$

C: normálósági tényező

a részecskék λ távolságra a kör csúcsától a kör körvonalán felé:

$$\nabla \phi(\lambda, \varphi) = \frac{C \pi}{2\varphi} \lambda^{\pi/(2\varphi)-1}$$

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^R \nabla \phi d\lambda = \dots \approx C R^{\pi/(2\varphi)}$$

$a=1$: mérték v. a differenciál részecske mérete

$$\text{és } \frac{dR}{dt} = \int_0^R \nabla \phi d\lambda = \dots \approx C$$

$$\Rightarrow R^{D-1} \approx \frac{dN}{dR} = \frac{dN/dt}{dR/dt} \approx R^{\pi/(2\varphi)}$$

$$N \sim R^D$$

$$\Rightarrow D = 1 + \frac{\pi}{2\varphi} = \frac{3\pi - \Theta}{2\pi - \Theta}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow D = \frac{5}{3}$$

$$\Theta \approx 106^\circ \rightarrow D \approx 1,71$$

látjuk, hogy $\nabla \phi$ skálázás okozza a fraktalitást

Multifraktál skálázás

multifraktál: a DLA klaszter növekedési sebessége egy adott pontján

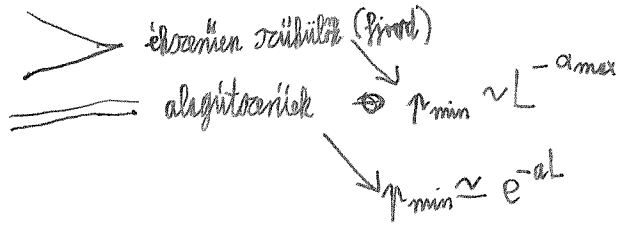
$p(r_i)$ növekedési val.szm., ennek az eloszlás multifraktál lesz

növekedési val.szm.-eloszláshoz tartozó ált. dim.:

$$D_q = \lim_{\epsilon/L \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i [p_i(\epsilon/L)]^q}{\ln(\epsilon/L)} \quad \leftarrow \quad \chi_q(\epsilon) = \sum p_i^q \sim \left(\frac{\epsilon}{L}\right)^{(q-1)D_q}$$

hogyan változik a klaszter méretével a legkisebb növekedési sebesség (p_{min})?

a völgyek behatolás

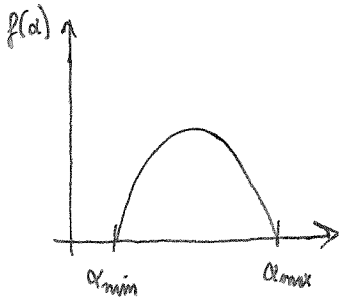


3. lehetőség : $\rightarrow p_{min} \approx e^{-c(\ln L)^c}, c \approx 2$

05. 10.

hatványfüggv.-nél gyorsabb, exp.-nál lassabb lecsengés

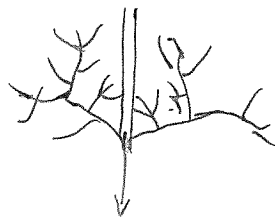
ha $p_{min} \sim L^{-\alpha_{max}} \sim \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha_{max}}$



a filigrán ágak árműködés a mögöttük lévő részt

önhasonlóság \rightarrow multiplikatív árműködés:

szorozódik az árműködés hatása



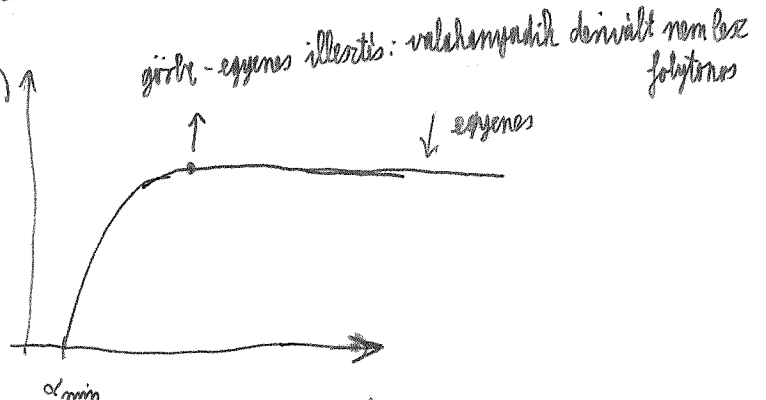
ha nem lenne szabad "csatorna" \rightarrow exp. lecsengés

\downarrow
 $\alpha_{max} \rightarrow \infty$ - nek felel meg

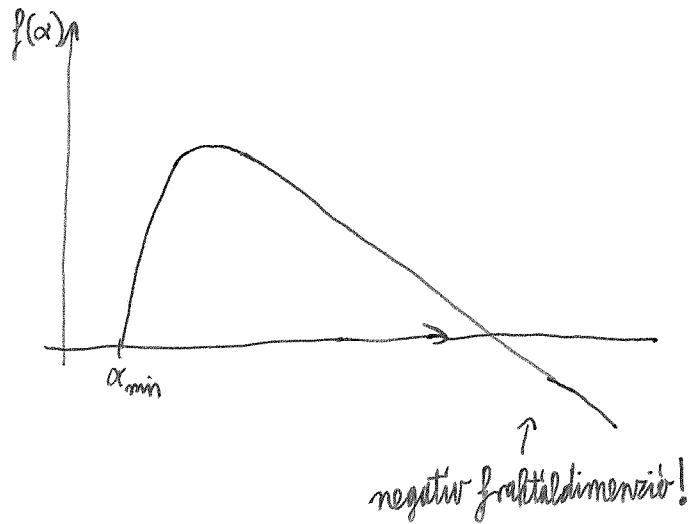
$f(\alpha)$: nincs benne inflexió $\leftarrow D_q$ monoton csökken

\downarrow
konkáv

$\rightarrow f(\alpha)$



ha $p_{min} \approx e^{-\alpha_{min}}$:



Diffrúzió - limitált üledés

növekedés egy felület mentén indul meg



egy klaszter fe tudja ármékelni a szomszédját is

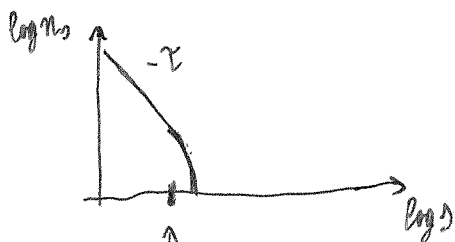
aggregátumot sokasága megjelenik, ezen belül klaszterek méreteloszlása: $n_s(N)$ (normált)

$L, N_t/L, n_{s,tot}/L$

skalázis: $n_s(N) \sim \delta^{-\tau} \cdot f\left(\frac{\delta}{N}\right)$, ahol $f(x)$ levág, $f(x) \approx 1$ ha $x \ll 1$ és $f(x) \approx 0$ ha $x \gg 1$

$\delta \gg 1, N \gg 1$

N_i részecskék száma egy oszlopban (N/L egységében)
 lerakott



levágás, ahol $\delta \approx N^{1/5}$

összes lerakott részecskék = \sum klaszterekben lévő részecskék

$$N = \sum_{\delta=1}^{\infty} \delta \cdot n_s(N) \sim \int \delta^{1-\tau} f(\delta/N) d\delta \approx \delta^{-1} N^{(2-\tau)/5} \int z^{(2-\tau-5)/5} f(z) dz \approx N^{(2-\tau)/5} \Rightarrow$$

|| konst., N-től független

$\Rightarrow \frac{2-\tau}{5} = 1 \Rightarrow \tau = 2 - 5$ skálázisfüggés a krit. exponensek között

$5 > 0 \rightarrow 2 - \tau > 0 \rightarrow \tau < 2$ kell, hogy legyen

\Rightarrow a fő jellemző az $\delta \gg 1$ klaszterekből származik

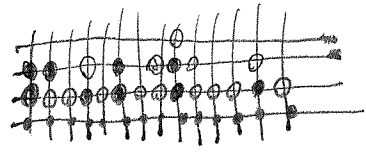
Növekvő önaffin felületek

nincs áramjelölő kölcsönhatás, és van egy bitüntetett növekedési irány

ebben a fejezetben d a szubsztátum dimenziója \rightarrow frekvenciái dim. = $d+1$

1. Eden-modell:

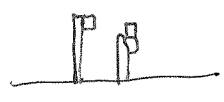
\forall albi pont be van töltve, a szomszédokat lehet betölteni \rightarrow véletlenül sorolunk egyet,



mindig 1 val. sim. -gel betöltjük

2. Ballisztikus üledés:

függetlenül eső részecskék, ahol eléri a felületet, megtapad \rightarrow lehetnek hibák oldalról is meg tud tapadni



3. Leemel a részecskék, nincs k -hatás a szomszédos oszlopok között

↓
kiegyenlítődés az oszlopok teteje közt, van egy burkoló kis ugrásokkal

\Rightarrow oszlopok magassága Poisson-eloszlású lesz

eloszlás sűrűsége $\sim \sqrt{N/L}$, átlagos magasság $\langle h \rangle = \frac{N}{L} = \frac{t}{\tau}$

4. (Frumoza-Wilkinson) felületi relaxáció

lentől eső részecskék, de ha 1-nél nagyobb "bunkó" felelkezik \rightarrow buggrik



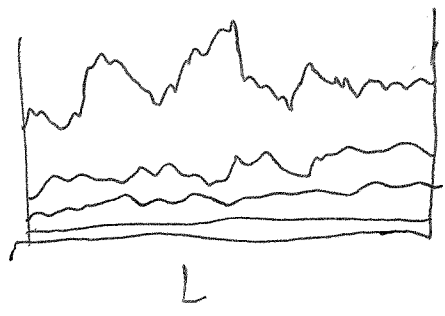
pl: Zúveglap fölé homokot szórunk

\rightarrow 2D: a felülete olyan lesz, mint a véletlen poligonális
 \downarrow 3D: a felülete csak logaritmikusan durva, azaz gyakorlatilag sima lesz

dinamikus skálázás

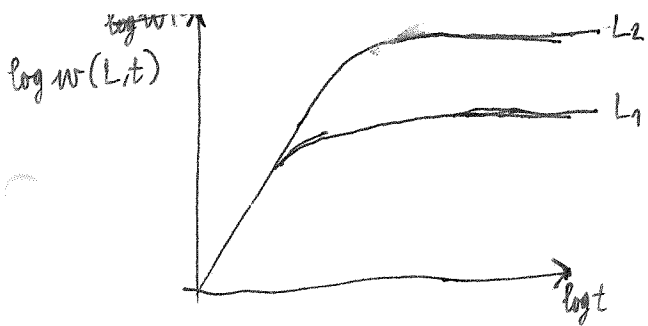
időben hogyan alakul ki a felület

$h(x,t)$ felület a burkoló



egyre durvul, hosszú idő után beáll egy stac. állapot, a felület nem durvul tovább

a felület vastagsága: $w(L,t) = \sqrt{\langle h^2(x,t) \rangle_x - \langle h(x,t) \rangle_x^2}$

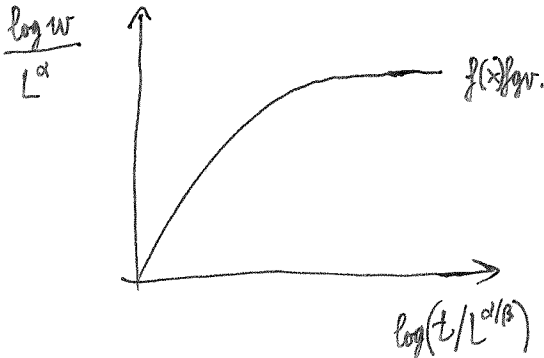


$L_2 > L_1$

$$w(L,t) = L^\alpha f(t/L^{\alpha/\beta})$$

$z = \frac{\alpha}{\beta}$ dinamikai skála exponens

inaffin fgv.-ek: $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{H}$
 \Downarrow
 L^α függés



$x \ll 1$: w csak t -től függ (independens),
 L -től független

\Downarrow
 kicsi x -re $f(x) \sim x^\beta$

nagy t -re szaturálódik a felület vastagsága

\Downarrow
 $f(x) \rightarrow \text{konst.}$

vagyis: $f(x) \sim \begin{cases} x^\beta, & \text{ha } x \ll 1 \\ \text{konst.}, & \text{ha } x \gg 1 \end{cases}$

alternatív leírás: magasság - magasság korrelációs fgv.:

\tilde{h} : átlagos magasságtól való eltérés

$$c(r,t) = \langle (\tilde{h}(r,t) - \tilde{h}(r+r',t+t'))^2 \rangle_{r,t} = \langle |\tilde{h}(r,t) - \tilde{h}(r+r',t+t)| \rangle_{r,t}$$

" $c(r,t)$ invariáns esetben

ahol $\tilde{h}(r,t) = h(r,t) - \langle h(r,t) \rangle_{\mathbb{I}}$

ene: $c(r,t) \sim r^\alpha f\left(\frac{t}{r^z}\right)$ skálátörvény, mihez skálázódik, mint w

ha $r \ll L$: $(r, t) \sim r$, t nagy: $c(r, t_0) \sim r^\alpha$
 rögzített r , kis t : $(r, t) \sim t^{\beta}$ $c(r_0, t) \sim t^\beta$

6.0) elmélet

$\tau \rightarrow x$ (magas) átérés az egyezés miatt

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = G_1(h(x,t), x, t) + \eta(x,t)$$

↑
átlagos növekedés ↑
zaj

$$\langle \eta(x,t) \rangle = 0$$

azaz η fehér zaj, korrelálatlan

$$\langle \eta(x,t) \eta(x',t') \rangle = 2C \delta(x-x') \delta(t-t')$$

szimmetria elvek: (6-1-re megszorítottok) invarianciák:

i) időbeli translációra formán $(t \mapsto t + \delta_t)$

$$t^2 \rightarrow t^2 + 2t\delta_t + \delta_t^2 \quad \text{nem lehet}$$

→ nem lehet explicit t -függő

$$\frac{\partial h(x, t + \delta_t)}{\partial (t + \delta_t)} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \quad \text{OK.}$$

ii) növekedési irányban transláció $(h=0 \text{ hely szint választásától független})$

⇒ explicit h függő nem lehet

$$\nabla^n h \text{ lehet}$$

iii) szubsztitutum menti eltérés

⇒ explicit x függő nem lehet

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \quad \text{OK}$$

iv) forgatás: ~~magas~~ bal-jelű tükrözés

⇒ a páratlan gradiensek se szerepelhetnek

v) fel-le szimmetria

csak egyensúlyban igaz, ekkor nincs potenciális (pl. $(\nabla \cdot h)^2$) is kiemelés

nem egyensúly → kiválasztott irányok

lineáris elmélet

th. ∇h kicsi → magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta(x,t) \quad (\text{Edwards-Wilkinson egy.})$$

felület növekedését a lokális görbület és a véletlen tag adja meg

skalársal megoldás:

met: mezo. fraktál, invariáns a skalársra → egyenlet is inv. erre

$$x \mapsto x' = \frac{x}{l} \quad \text{és} \quad h \mapsto h' = \frac{h}{l^\alpha} \quad \text{és} \quad t \mapsto t' = \frac{t}{l^\beta}$$

megj.: ez az egyenlet csak a durvulást írja le, a növekedéshez egy +v tag is kell a jobb oldalra

zaj skálázása: $\langle \eta(r, \underline{x}, t) \eta(r', \underline{x}', t') \rangle = 2C r^{-(d+z)} \delta(\underline{x}-\underline{x}') \delta(t-t')$

\uparrow
 $\delta^d(a\underline{x}) = a^{-d} \delta^d(\underline{x})$

\Downarrow
tph: $\eta(r, \underline{x}, t) \mapsto r^{-(d+z)/2} \eta(\underline{x}, t)$

skalázás után: $r^{\alpha-z} \frac{\partial h(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nu r^{\alpha-2} \nabla^2 h + r^{-(d+z)/2} \eta \quad /: r^{\alpha-z}$

$\frac{\partial h(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nu r^{z-2} \nabla^2 h + r^{-(d+z)/2-\alpha} \eta$

szelnek a tagoknak r -től függetlenül kell lenni \Rightarrow

$\Rightarrow \alpha = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4}, \quad z=2$

és $d=2$ a kritikus dimenzio (ha $d > 2$; a formulák értelmetlenek)

$d=2$ (síkra növeztünk): $\alpha=0$, fizici sima felület

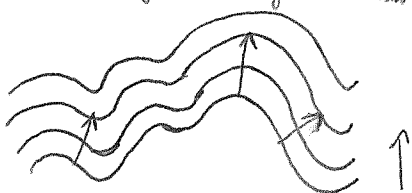
Nonlineáris eset: Kardar-Parisi-Zhangy (KPZ) egyenlet

05. 17.

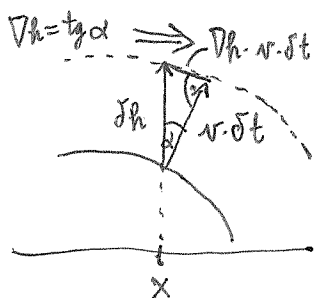
$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \nu + \eta(\underline{x}, t)$

~ felületi feszültség, simítja a fvr.-t

1. nemlin. tag \Rightarrow a felület oldalra is tud mozogni, ki tud szelkedni



felület mozgása: állandó sebességgel, a pillanatnyi normális irányjába



nagy skálán vizsgáljuk $\Rightarrow \nabla h \ll 1$

$\delta h = \sqrt{(\nu \delta t)^2 + (\nu \delta t \cdot \nabla h)^2}$ sorfejlesztjük ($\nabla h \ll 1$)

$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu [1 + (\nabla h)^2]^{1/2} \approx \nu + \frac{\nu}{2} (\nabla h)^2 + \dots$

$(\nabla h)^2$ hatása: a domboknak nő a sugara, a völgyeké csökken, élesedik de ezek az éles részek ált. összehasadnak
fizimuláció



zaj: durvulást okoz

az előző egyenlettel (8) alkalmazott skaláris módszer itt a nemlinearitás miatt nem működik

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \approx (\nabla \tilde{h})^2 \quad \text{egyenletet vizsgáljunk}$$

↳ megoldás: $\tilde{h}(x,t) = t^\beta g\left(\frac{x}{t^{1/z}}\right)$ alakú legyen (g : önállóan fgv., ilyen megoldást keresünk)

Behelyettesítve: $t^{\beta-1} g(y) - t^\beta g'(y) t^{-1/z-1} \approx t^{2\beta} [g'(y)]^2 t^{-2/z} \quad t \ll 1 \rightarrow$

↳ (lassabban divergál), mint az előző tag / gyorsabban $\Rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$: lassabban divergál, mint az előző tag

$$\beta - 1 = 2\beta - \frac{2}{z} \quad \text{mert ennek a két tagnak hasonló tempóban kell divergálnia}$$

$$-z = \beta z - 2 \quad z = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha + z = 2 \quad \text{1 független exponens van}$$

$d=1$: a szec. felület egy vékony rétege ($H=1/2$) $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, z = \frac{3}{2}$

felületi diffúzió

a felület alakját nagyrészt a felületi diffúzió határozza meg

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -K \nabla^4 h + \eta(x,t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla j(x,t) \quad \text{és} \quad j(x,t) = -\nabla \mu(x,t)$$

j : áram, μ : kémiai potenciál, és $\mu(x,t) \sim -\nabla^2 h(x,t)$

$-\nabla^2 h \sim \frac{1}{r_{\text{local}}}$, dombokon kevesebb atom van, völgyekben több, oda nehezebb betenni újabb részecskét

átskaláriszál: $\frac{\partial h}{\partial t} = K t^{\beta-4} \nabla^4 h + t^{-(z-d-2\alpha)/2} \eta$

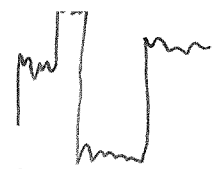
$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{2}, \quad \beta = \frac{4-d}{8}, \quad z = 4$$

$\alpha > 1!$

eddig: α dimenzió exponens 0 és 1 között volt

$\alpha > 1$: minél közelebb van egymáshoz 2 pont, annál nagyobb köztül az átlagos magasságkülönbség

van ilyen felület, pl:



függvények ez nem jellemző \rightarrow vannak más tagok is a felületi diff. mellett

simulációkkal egyezik, ~~(pl)~~

elmélet-simuláció ált. egyezik, kísérletek nem!

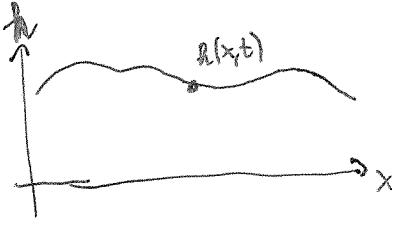
pl: nedvesítés itatóban, lakószomszédok, tüdőpont, ...

ha: a valószínűség nem felel meg az

Növekedés véletlen közegben

a felületet erő perturbáció a felület helyétől függ:

$$\langle \eta(r, x) \eta(r', x') \rangle = \delta^d(x-x') \Delta(r-r')$$



$\Delta(r-r')$: δr távolságig ≈ 1 , utána $\rightarrow 0$

„determinisztikus“ növekedés, ~~szimuláció~~
inhomogén közegben helyenként lassan/gyorsan terjed

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F + \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \nu + \eta(r(x,t), x)$$

↑
hüvely

exponensek skálamegfontolásból:

mező. önaffin függ.: $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^\alpha$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx \frac{(\Delta h)^2}{(\Delta x)^2} \sim (\Delta x)^{-d/2}$$

η nagyságrendje
 \leftarrow \forall tag azonos nagyságrendű kell legyen

$$\Delta h = \Delta x^{\frac{1}{2}(2-d/2)} = \Delta x^{(4-d)/4} \sim \Delta x^\alpha$$

$$\Delta h \Delta x^{d/2} = \Delta t = \Delta h^{\frac{1+\frac{d}{2} \cdot \frac{4}{4-d}}{1}} = \Delta h^{\frac{4+d}{4-d}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{4}, \quad \beta = \frac{4-d}{4+d}$$

$d=1$: $\alpha=0,75$ és $\beta=0,6$; jól egyezik a kísérletekkel és a simulációkkal is

Mintázathépcódás

- felületi feszültség
- anizotropia
- fluktuációk
- felületet hajtó erő

Egyenletek

$u(\underline{x}, t)$ dimenziótlon skálármérvő (pl: hőmérséklet szilindrikus, nyomás folyadékok beveredésekor, elektr. pot., koncentráció)

$\nabla^2 u(\underline{x}, t) = 0$ igaz rájuk lesz növekedésnél, változó határfelület

$C \nabla^2 u(\underline{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ gyors növekedésnél, ~~az~~ a határfelület változásához nem relaxál elég gyorsan

felületre \perp irányban a növekedési sebesség: $v_n = -C \cdot \hat{n} \cdot \nabla u$ \hat{n} : normális egységvektor

pl: kristályosodás \Rightarrow látenhő, minél gyorsabban diffundál el a hő, annál jobban tud kristályosodni

határfelt.: $\nabla u = 0$ a növekvő felületen és $u_{\infty} = \text{const.}$

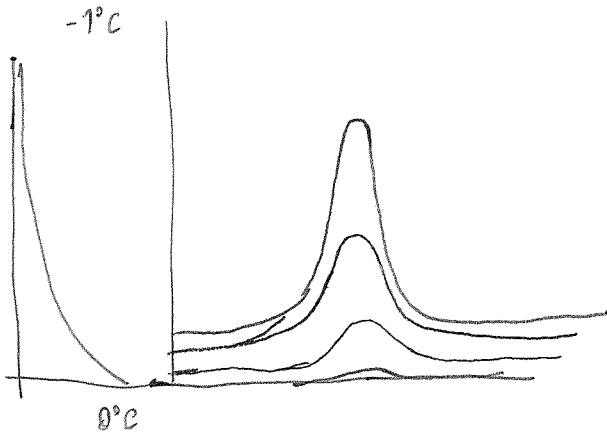
u értéke a növekvő felületen: $u_{\Gamma} = -d_0 K - \beta v_n^2$

K : görbülete a felületnek
 v_n : felület sebessége

(és $u_{\Gamma} = 0$ egyensúlyban)

Mullins - Sekerka instabilitás

$T_{\infty} = -1^\circ\text{C}$
 ~~$T_{\infty} = 1^\circ\text{C}$~~ tñ. a felület egy helyen nem teljesen sima



tñ. polikristályos anyag, 0°C -on fagy
 \downarrow
nincs anizotropia

$u_{\Gamma} = -d_0 K$, $K > 0 \Rightarrow$ minél hegyesebb, annál nagyobb a görbület, annál hidegebb

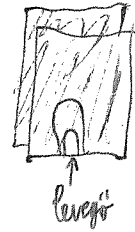
Bis hupli előrébb van \rightarrow hidegebb van \rightarrow gyorsabban nő
 \downarrow
még hidegebb

ha elég hegyes: $u_{\Gamma} = -1^\circ\text{C} \Rightarrow \nabla u = 0$ lesz, megáll a hegyesedés, felváz egy stac. alakot, így nő tovább

pl: dendrites (eliqués) kristályosodás

pl.2: 2 üreges közti sűrű folyadék ($\rho_1 = \rho_2$), levegő pumpálunk vele
nyomásgradientis hajtja a folyadékot

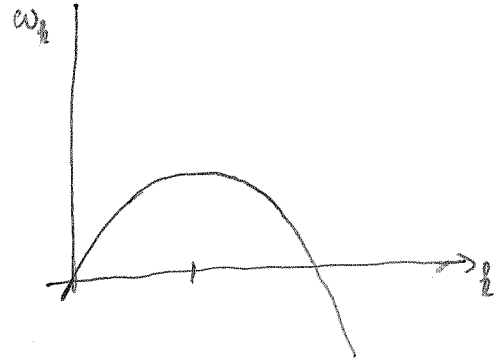
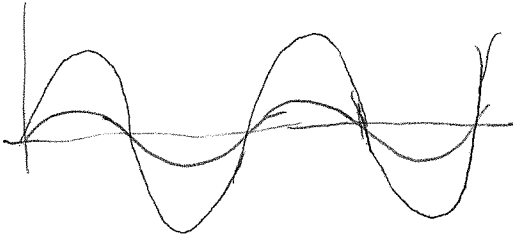
itt $u_{1r} = -d_0 k$: felületi feszültség



stabilitás vizsgálat: ω_2

k hullámzámmal in perturbáció, instabil lesz;

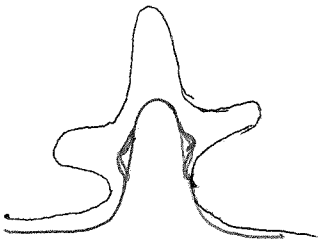
lin. stab. vizsg.: $e^{\omega_2 t}$ -vel ^{megy} az amplitúdó
 $\omega_2 \approx kv \left(1 - \frac{d_0 C}{v} k^2\right)$



k nagy (λ kicsi): $\omega_2 < 0$, kicsimul

~~nagy~~ $k=0$ ($\lambda \rightarrow \infty$): $\omega_2 = 0$

\exists egy k , ahol ω_2 max.: Br. ez jellemzi a keletkező struktúrát



egy oros + perturbáció \Rightarrow elágazás, ez ismétlődik \Rightarrow komplexált, elágazó szerkezet

DLA, bolyongó részecske megtalálása val. sim. x rácspontra $t+1$ időben:

$$u(x, t+1) = \frac{1}{Z} \sum_a u(x+a, t)$$

a : szomszédos mutatói vektorok, Z db. szomszéd

pl: négyzetrács:

$$u(i, j, t+1) - u(i, j, t) = \frac{1}{4} [u(i-1, j, t) - 2u(i, j, t) + u(i+1, j, t) + u(i, j-1, t) - 2u(i, j, t) + u(i, j+1, t)]$$

↑
 Δu rács

határfeltételeket is megkapjuk

Zaj-redukció DLA-ban

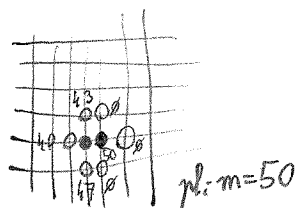
DLA: egy részecske mozog, esetlegesen \rightarrow véletlenszerűség, a felületi struktúrában is

de: pl. víz kristályosodásánál szabályos, ~~de~~ struktúrák

DLA-ból hogyan lehet ki kell szedni a fluktuációt

bolyongó részecske vbrh. értéke ~~mind~~ megfelel a Laplace-egyenletnek

módozat:



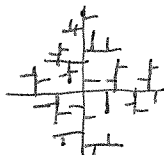
számlálók a növekedési helyekre,

+1, ha odár egy bolyongó részecske

ha elb. egy adott m -et, betöltjük, új helyekre számlálók 0-val

\sim átlagos

\Rightarrow négyzetrács:



szomszós kristályok ~~de~~ így növekednek