

Biológiai Rendszerek Statisztikus Fizikája

2015. december 17.

- Palla Gergely / pallag@hal.elte.hu /
ELTE TTK Biológiai Fizika Tanszék,
Északi Tömb, 3.90. szoba
Fogadó óra: csütörtök, 10-12.
- Farkas Illés / fij@hal.elte.hu /
ELTE TTK Biológiai Fizika Tanszék,
Északi Tömb, 3.90. szoba
Fogadó óra: kedd, 13-15.
- Az előadás fóliái letölthetők innen:
http://pallag.web.elte.hu/biostat/biostat_2015.html
- További anyagok a korábbi évekből itt:
http://hal.elte.hu/~vicsek/teaching/biologiai_rendszerek_statistikus_fizikaja/

VIZSGA:

- ZH az őszi szünet után, (mindent lehet használni).
- Szóbeli a vizsgaidőszakban:
 - a ZH eredmény 1/3-os súllyal számít be,
 - aki nem írt ZH-t, annak 1 jegy levonás,
 - aki nem jár be, (nincs ott az előadások min. 67%-án), annak szintén 1 jegy levonás,
 - órai aktivitás pozitívan befolyásolja a jegyet.

- I. Skálaviselkedés (fázisátalakulások, kritikus pont) és a fluktuációk alaptulajdonságai, szerepe a biológiában.
- II. Fraktálok: definíciók (dimenziók, korrelációs függvények), típusaik, dimenziók közötti összefüggések.
- III. Önszervezően kritikus rendszerek modelljei és példák a biológiából.
- IV. Baktériumtelepek geometriája I: mikrobiológiai háttér, morfológiai diagram, Fisher-egyenlet, instabilitás eredete.
- V. Baktériumtelepek geometriája II: fraktálnövekedés modelljei (önhasonló, önaffin, irányított perkoláció).
- VI. Szinkronizáció a biológiában: Integrál és tüzel modellek.
- VII. A szinkronizáció Kuramoto-modellje (különböző sajátfrekvenciák és "termikus" - korrelálatlan, időfüggő - zaj esete).
- VIII. Hálózatok I: alapfogalmak, (gráfok, szomszédsági mátrix, ritka gráf, foksám és klaszterezettség, kis világ tulajdonság, skálafüggetlenség).
- IX. Hálózatok II: modellek (Erdős–Rényi-modell, Watts–Strogatz-modell, Barabási–Albert-modell, konfigurációs modell, determinisztikus skálafüggetlen modellek, gráfsokaságok, topologikus fázisátalakulások).
- X. Hálózatok III: alkalmazások (álózatok robusztussága, terjedés hálózatokon, SIS modell, hálózati csoportkeresés, hierarchikus klaszterezés, Girvan–Newman-algoritmus, modularitás, k-klikk perkoláció).
- XI. Kollektív mozgás: Alapjelenség, alapmodell (csoportos mozgás 1, 2 és 3 dimenzióban, fázisátalakulás, skálatulajdonságok, emberek csoportos mozgása).

Órabeosztás

Bevezetés

Szept. 7.	Palla Gergely	I.-II.
Szept. 14.	Palla Gergely	
Szept. 21.	Farkas Illés	III.-VII.
Szept. 28.	Farkas Illés	
Okt. 5.	Farkas Illés	
Okt. 12.	Farkas Illés	
Okt. 19.	Farkas Illés	
Okt. 26.	szünet	
Nov. 2.	ZH	
Nov. 9.	Palla Gergely	VIII.-X.
Nov. 16.	Palla Gergely	
Nov. 23.	Palla Gergely	
Nov. 30.	Palla Gergely	
Dec. 7.	Farkas Illés	XI.

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

SKÁLÁZÁS (FÁZISÁTALAKULÁSOK, KRITIKUS PONT) ÉS FLUKTUÁCIÓK SZEREPE A BIOLÓGIÁBAN

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Elsőrendű és
folytonos
A kritikus pont

SKÁLÁZÁS

Skála és skálázás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

● Mi a skála?

Skála és skálázás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Mi a **skála**?

→ Általában valamilyen fizikai mennyiség mérésénél használt egység, pl. méter, centiméter, stb.



Skála és skálázás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Mi a **skála**?

→ Általában valamilyen fizikai mennyiség mérésénél használt egység, pl. méter, centiméter, stb.



- Mit jelent az, hogy valami **skálázik**?

Skála és skálázás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendő és folytonos
A kritikus pont

● Mi a **skála**?

→ Általában valamilyen fizikai mennyiség mérésénél használt egység, pl. méter, centiméter, stb.



● Mit jelent az, hogy valami **skálázik**?

→ Általában egy mennyiség egy másik mennyiségtől való függésére szoktuk azt mondani, hogy „skálázik”, pl. *A* (valahogyan) skálázik *B*-vel.

Skála és skálázás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Mi a **skála**?

→ Általában valamilyen fizikai mennyiség mérésénél használt egység, pl. méter, centiméter, stb.



● Mit jelent az, hogy valami **skálázik**?

→ Általában egy mennyiség egy másik mennyiségtől való függésére szoktuk azt mondani, hogy „skálázik”, pl. A (valahogyan) skálázik B -vel.

→ A legegyszerűbb esetben ez annyit jelent, hogy a B mérésre használt egység megváltozása az A -ra kapott eredményt csak nagyon egyszerűen befolyásolja.

Skálázás

Egy triviális példa

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Hogyan skálázik egy kocka térfogata az élhosszával?

Skálázás

Egy triviális példa

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Hogyan skálázik egy kocka térfogata az élhosszával?

$$V = l^3$$



Skálázás

Egy triviális példa

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendű és folytonos
A kritikus pont

- Hogyan skálázik egy kocka térfogata az élhosszával?

$$V = l^3$$



- A hatványfüggvény alakú kapcsolat következményei:

Skálázás

Egy triviális példa

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendő és folytonos
A kritikus pont

- Hogyan skálázik egy kocka térfogata az élhosszával?

$$V = l^3$$



- A hatványfüggvény alakú kapcsolat következményei:
 - Ha l skáláját a -val szorozzuk/osztjuk, akkor a V -re kapott eredeti értéket a^3 -el kell osztani/szorozni.

Skálázás

Egy triviális példa

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendű és folytonos
A kritikus pont

- Hogyan skálázik egy kocka térfogata az élhosszával?

$$V = l^3$$



- A hatványfüggvény alakú kapcsolat következményei:
 - Ha l skáláját a -val szorozzuk/osztjuk, akkor a V -re kapott eredeti értéket a^3 -el kell osztani/szorozni.
 - Ha van két kockánk, melyek közül az első kocka élhossza a -szorosa a második kocka élhosszának, akkor **az l skálájától függetlenül** igaz, hogy az első kocka térfogata a^3 -szöröse a másodikénak.

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Mi történik, ha A és B közt nem hatványfüggvényszerű a kapcsolat?

$$A \sim \exp(B),$$

$$A \sim \sin(B),$$

⋮

- Ilyenkor B átskálázása bonyolultabb, az ez által okozott változást A -ban nem olyan egyszerű megadni.

Skálázás

Definíció

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó függvény

Definíció: egy $F(x)$ függvény **skálázik**, ha

$$F(a \cdot x) = g(a) \cdot F(x),$$

azaz a függvény argumentumát megváltoztatva a függvény alakja megmarad, csak egy szorzóval változik.

A hatványfüggvények skálázók

Tegyük fel, hogy $F(x) = b \cdot x^\gamma$.

$$\rightarrow F(a \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)^\gamma = b \cdot a^\gamma \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot b \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot F(x).$$

Sőt, az is belátható, hogy minden skálázó függvény hatványfüggvény.

Skálázás

Definíció

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus

fluktuációk

Makroszkopikus

fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és

kontrollparaméter

Eleőrendű és

follytonos

A kritikus pont

Skálázó függvény

Definíció: egy $F(x)$ függvény **skálázik**, ha

$$F(a \cdot x) = g(a) \cdot F(x),$$

azaz a függvény argumentumát megváltoztatva a függvény alakja megmarad, csak egy szorzóval változik.

A hatványfüggvények skálázók

Tegyük fel, hogy $F(x) = b \cdot x^\gamma$.

$$\rightarrow F(a \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)^\gamma = b \cdot a^\gamma \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot b \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot F(x).$$

Sőt, az is belátható, hogy minden skálázó függvény hatványfüggvény.

Skálázás

Definíció

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrrendű és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó függvény

Definíció: egy $F(x)$ függvény **skálázik**, ha

$$F(a \cdot x) = g(a) \cdot F(x),$$

azaz a függvény argumentumát megváltoztatva a függvény alakja megmarad, csak egy szorzóval változik.

A hatványfüggvények skálázók

Tegyük fel, hogy $F(x) = b \cdot x^\gamma$.

$$\rightarrow F(a \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)^\gamma = b \cdot a^\gamma \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot b \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot F(x).$$

Sőt, az is belátható, hogy minden skálázó függvény hatványfüggvény.

Skálázás

Definíció

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó függvény

Definíció: egy $F(x)$ függvény **skálázik**, ha

$$F(a \cdot x) = g(a) \cdot F(x),$$

azaz a függvény argumentumát megváltoztatva a függvény alakja megmarad, csak egy szorzóval változik.

A hatványfüggvények skálázók

Tegyük fel, hogy $F(x) = b \cdot x^\gamma$.

$$\rightarrow F(a \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)^\gamma = b \cdot a^\gamma \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot b \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot F(x).$$

Sőt, az is belátható, hogy minden skálázó függvény hatványfüggvény.

Skálázás

Definíció

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus

fluktuációk

Makroszkopikus

fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és

kontrollparaméter

Előrendű és

folytonos

A kritikus pont

Skálázó függvény

Definíció: egy $F(x)$ függvény **skálázik**, ha

$$F(a \cdot x) = g(a) \cdot F(x),$$

azaz a függvény argumentumát megváltoztatva a függvény alakja megmarad, csak egy szorzóval változik.

A hatványfüggvények skálázók

Tegyük fel, hogy $F(x) = b \cdot x^\gamma$.

$$\rightarrow F(a \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)^\gamma = b \cdot a^\gamma \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot b \cdot x^\gamma = a^\gamma \cdot F(x).$$

Sőt, az is belátható, hogy minden skálázó függvény hatványfüggvény.

Hatványfüggvények ábrázolása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

- Sokszor **log-log** skálán ábrázoljuk. Miért?

Hatványfüggvények ábrázolása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus

fluktuációk

Makroszkopikus

fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Sokszor **log-log** skálán ábrázoljuk. Miért?

- Hatványfüggvény: $F(x) = bx^\gamma$,

→ $\ln F(x) = \ln b + \gamma \cdot \ln x$.

- A log-log ábrán

$$\begin{aligned}x' &\rightarrow \ln x, \\y = F'(x) &\rightarrow \ln F(x), \\ \rightarrow y = F'(x) &= \ln b + \gamma \cdot x'\end{aligned}$$

- Azaz a log-log ábrán a hatványfüggvény egyenesnek látszik, γ meredekséggel.

Hatványfüggvények ábrázolása

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

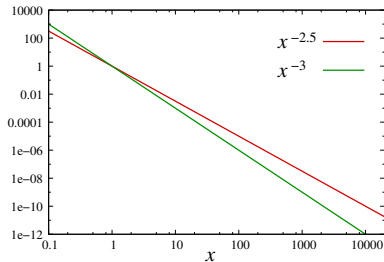
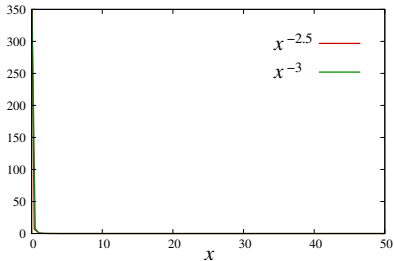
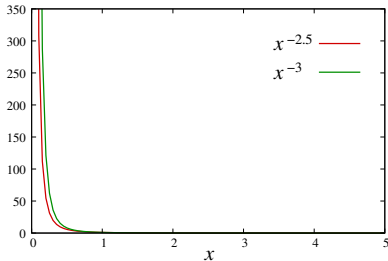
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



Hatványfüggvények a biológiában?

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Hol találkozhatunk hatványfüggvényekkel a biológiában?

Hatványfüggvények a biológiában?

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Hol találkozhatunk hatványfüggvényekkel a biológiában?

pl. „Allometric scaling”.

Allometric scaling

Body surface

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

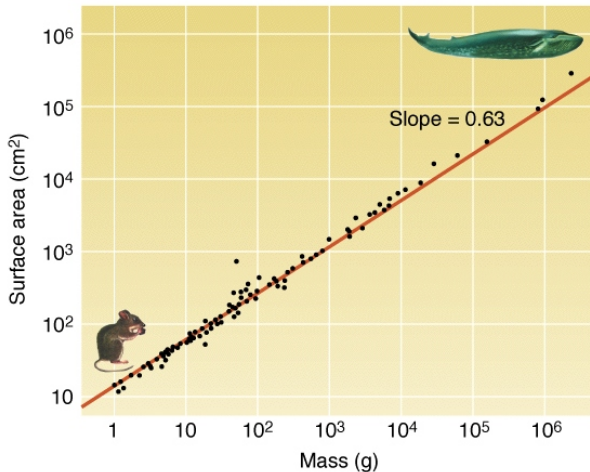
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Body parts

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

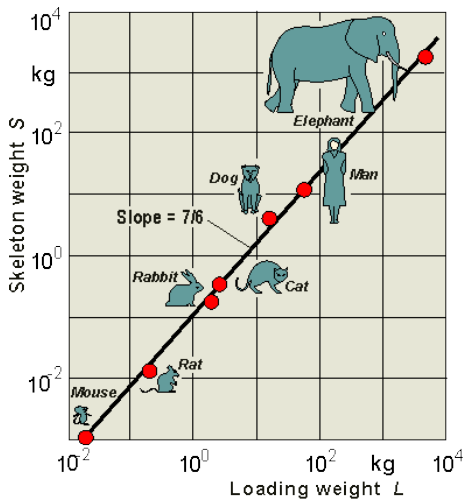
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Body parts

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

Példák

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Eleőrendő és folytonos

A kritikus pont

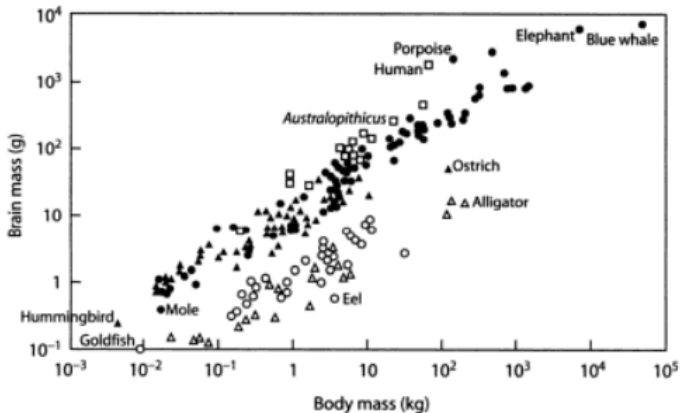


Figure 15. Brain size of 200 species of vertebrates plotted against body size on a log-log graph. Primates are open squares; other mammals are solid dots; birds are solid triangles; bony fishes are open circles; and reptiles are open triangles. (After H. J. Jerison, *The Evolution of the Brain and Intelligence*, 1973)

Allometric scaling

Body parts

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus fluktuációk

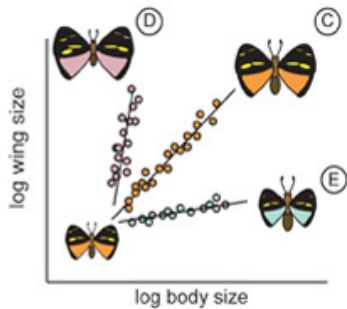
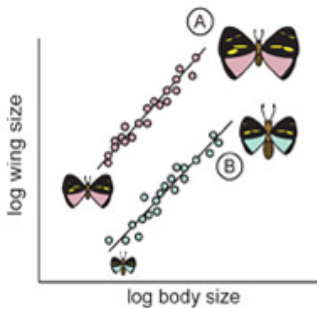
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Eleőrendű és folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Velocity

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

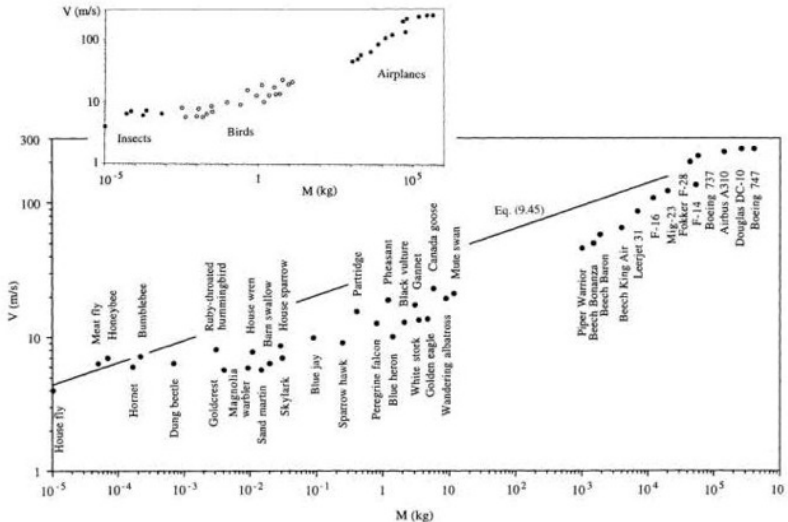
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Vascular system

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

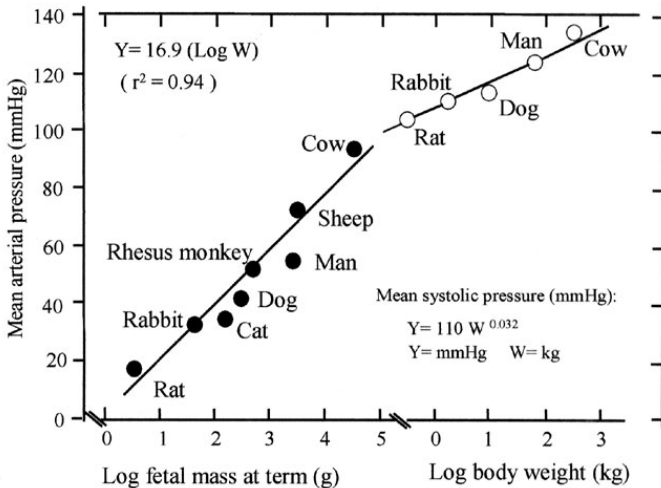
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Vascular system

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

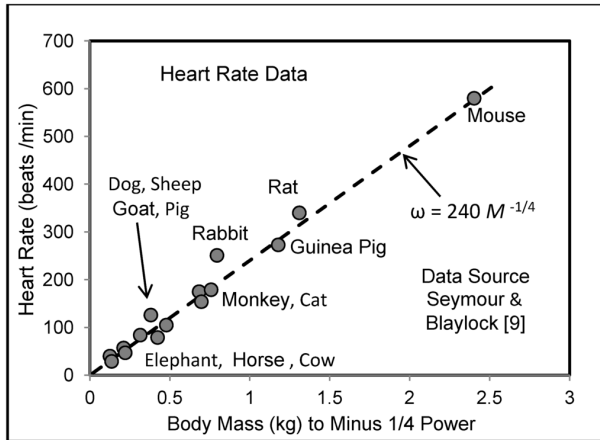
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrrendű és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Vascular system

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

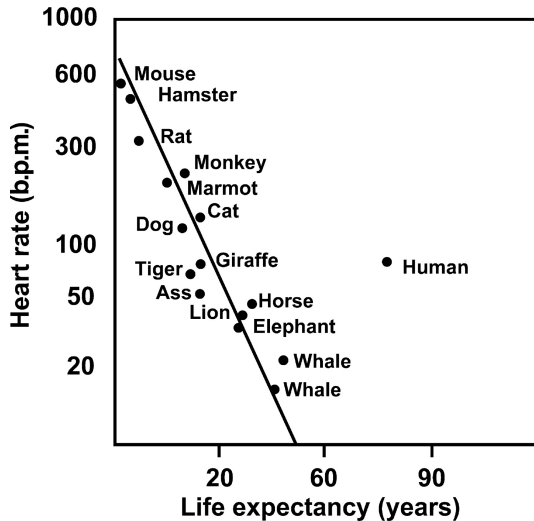
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont



Allometric scaling

Metabolic rate

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

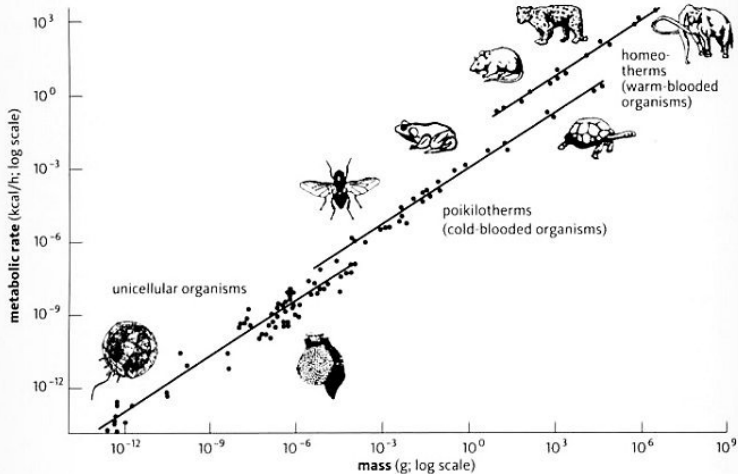
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



1 kcal/h = 1.162 watts

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

SKÁLÁZÓ ELOSZLÁSOK

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Mi az, hogy eloszlás?

Eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Mi az, hogy eloszlás?



- Mi az, hogy eloszlás?

Eloszlás

- Egy változó eloszlása a különböző értékek előfordulási valószínűségeinek összessége.
- Leggyakrabban a $\rho(x)$ **sűrűségfüggvénnyel** szoktuk megadni:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x') dx' = P(x \in [x_1, x_2]), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x') dx' = 1$$

- A $\rho(x)$ integrálja az **eloszlásfüggvény**:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx', \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1.$$

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Az eloszlást (sűrűségfüggvényt) a gyakorlatban sokszor egy hisztogram segítségével adjuk meg.

Eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Az eloszlást (sűrűségfüggvényt) a gyakorlatban sokszor egy hisztogram segítségével adjuk meg.

Példa

- Tegyük fel, hogy a táblázatban látható cipőméreteket mértük egy 20 fős csoportban. Milyen lesz a cipőméret sűrűségfüggvénye?

méret	hány?
38-as	1
39-es	2
40-es	4
41-es	4
42-es	7
43-as	2
	$\Sigma = 20$

Eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

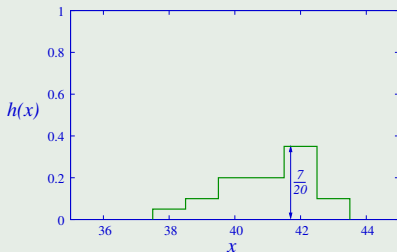
Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendű és folytonos
A kritikus pont

- Az eloszlást (sűrűségfüggvényt) a gyakorlatban sokszor egy hisztogram segítségével adjuk meg.

Példa

- Tegyük fel, hogy a táblázatban látható cipőméreteket mértük egy 20 fős csoportban. Milyen lesz a cipőméret sűrűségfüggvénye?

méret	hány?
38-as	1
39-es	2
40-es	4
41-es	4
42-es	7
43-as	2
	$\Sigma = 20$



Eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendű és folytonos
A kritikus pont

- Az eloszlást (sűrűségfüggvényt) a gyakorlatban sokszor egy hisztogram segítségével adjuk meg.
- Ha összesen n mintánk van, és ebből egy adott $[x, x + \Delta x]$ intervallumba k darab esik, akkor ott a hisztogram magassága:

$$h \cdot \Delta x = \frac{k}{n} \quad \rightarrow \quad h = \frac{k}{n \cdot \Delta x}$$

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Skálázó eloszlás

Egy eloszlás **skálázó**, ha hozzá tartozó $\rho(x)$ sűrűségfüggvény hatványfüggvény szerint viselkedik

$$\rho(x) \sim x^{-\alpha},$$

(legalábbis egy adott tartományon).

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó eloszlás

Egy eloszlás **skálázó**, ha hozzá tartozó $\rho(x)$ sűrűségfüggvény hatványfüggvény szerint viselkedik

$$\rho(x) \sim x^{-\alpha},$$

(legalábbis egy adott tartományon).

Skálázó eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Skálázó eloszlás

Egy eloszlás **skálázó**, ha hozzá tartozó $\rho(x)$ sűrűségfüggvény hatványfüggvény szerint viselkedik

$$\rho(x) \sim x^{-\alpha},$$

(legalábbis egy adott tartományon).

- Ha matematikailag precízebb definíciót akarunk adni:

$$x \in [x_{\min}, \infty], \quad \alpha > 1,$$
$$\rightarrow \rho(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}^{1-\alpha}} x^{-\alpha}.$$

Skálázó eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó eloszlás

Egy eloszlás **skálázó**, ha hozzá tartozó $\rho(x)$ sűrűségfüggvény hatványfüggvény szerint viselkedik

$$\rho(x) \sim x^{-\alpha},$$

(legalábbis egy adott tartományon).

- Ha matematikailag precízebb definíciót akarunk adni:

$$x \in [x_{\min}, \infty], \quad \alpha > 1,$$
$$\rightarrow \rho(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}^{1-\alpha}} x^{-\alpha}.$$

- Egy eloszlás két alap jellemzője a várható érték és a szórásnégyzet,

$$\langle x \rangle = \int x \rho(x) dx, \quad \sigma^2(x) = \int x^2 \rho(x) dx - \langle x \rangle^2,$$

Skálázó eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

Skálázó eloszlás

Egy eloszlás **skálázó**, ha hozzá tartozó $\rho(x)$ sűrűségfüggvény hatványfüggvény szerint viselkedik

$$\rho(x) \sim x^{-\alpha},$$

(legalábbis egy adott tartományon).

- Ha matematikailag precízebb definíciót akarunk adni:

$$x \in [x_{\min}, \infty], \quad \alpha > 1,$$
$$\rightarrow \rho(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}^{1-\alpha}} x^{-\alpha}.$$

- Egy eloszlás két alap jellemzője a várható érték és a szórásnégyzet,

$$\langle x \rangle = \int x \rho(x) dx, \quad \sigma^2(x) = \int x^2 \rho(x) dx - \langle x \rangle^2,$$

$$\text{Ha } \alpha > 3, \quad \rightarrow \quad \langle x \rangle < \infty, \quad \sigma^2(x) < \infty$$

$$\text{Ha } \alpha < 3, \quad \rightarrow \quad \langle x \rangle < \infty, \quad \sigma^2(x) = \infty$$

$$\text{Ha } \alpha < 2, \quad \rightarrow \quad \langle x \rangle = \infty \quad \sigma^2(x) = \infty$$

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Miért különleges egy skálázó eloszlás?

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Előrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Miért különleges egy skálázó eloszlás?
→ Mert nagyon **INHOMOGÉN**:

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Előrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Miért különleges egy skálázó eloszlás?

→ Mert nagyon **INHOMOGÉN**:

- extrém nagy értékek is előfordulnak, nem elhanyagolható valószínűséggel,

Skálázó eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Előrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Miért különleges egy skálázó eloszlás?

→ Mert nagyon **INHOMOGÉN**:

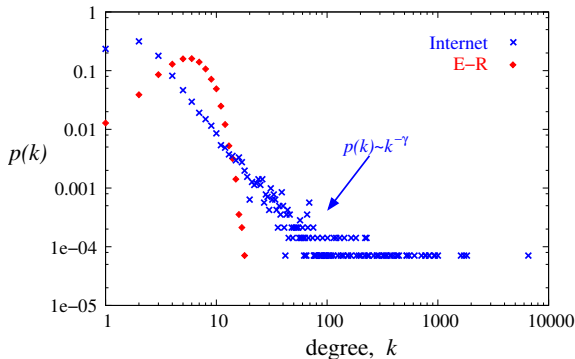
- extrém nagy értékek is előfordulnak, nem elhanyagolható valószínűséggel,
- az átlag (ha egyáltalán létezik) nem ad szemléletes jellemzést.

Skálázó eloszlás

- Miért különleges egy skálázó eloszlás?

→ Mert nagyon **INHOMOGÉN**:

- extrém nagy értékek is előfordulnak, nem elhanyagolható valószínűséggel,
- az átlag (ha egyáltalán létezik) nem ad szemléletes jellemzést.
- Egy skálázó- és nem skálázó eloszlás összehasonlítása:



Pareto-eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Vilfredo Pareto:

- A 80-20-as szabály: A föld (pénz,vagyon, stb.) több mint 80%-át az emberek kevesebb mint 20%-a birtokolja.



Pareto-eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

Vilfredo Pareto:

- A 80-20-as szabály: A föld (pénz,vagyon, stb.) több mint 80%-át az emberek kevesebb mint 20%-a birtokolja.
- A birtokolt javak eloszlása:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_{\min}}{x^{\alpha+1}} & x > x_{\min} \\ 0 & x < x_{\min} \end{cases}$$



Pareto-eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

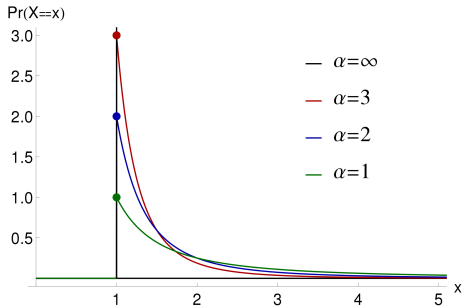
A kritikus pont

Vilfredo Pareto:

- A 80-20-as szabály: A föld (pénz,vagyon, stb.) több mint 80%-át az emberek kevesebb mint 20%-a birtokolja.
- A birtokolt javak eloszlása:



$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_{\min}}{x^{\alpha+1}} & x > X_{\min} \\ 0 & x < X_{\min} \end{cases}$$



Pareto-eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrrendű és
folytonos

A kritikus pont

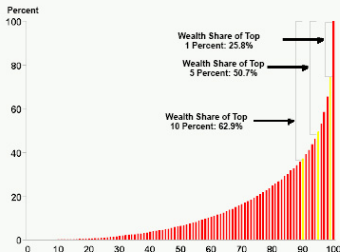
Vilfredo Pareto:

- A 80-20-as szabály: A föld (pénz,vagyon, stb.) több mint 80%-át az emberek kevesebb mint 20%-a birtokolja.
- A birtokolt javak eloszlása:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_{\min}}{x^{\alpha+1}} & x > X_{\min} \\ 0 & x < X_{\min} \end{cases}$$



FIGURE 1
Wealth Distribution in the United States — 2003
(married households headed by a 60-69 year old)



Pareto-eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Vilfredo Pareto:

- A 80-20-as szabály: A föld (pénz,vagyon, stb.) több mint 80%-át az emberek kevesebb mint 20%-a birtokolja.
- A birtokolt javak eloszlása:

$$\rho(X) = \begin{cases} \frac{\alpha X_{\min}}{X^{\alpha+1}} & X > X_{\min} \\ 0 & X < X_{\min} \end{cases}$$

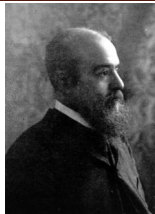
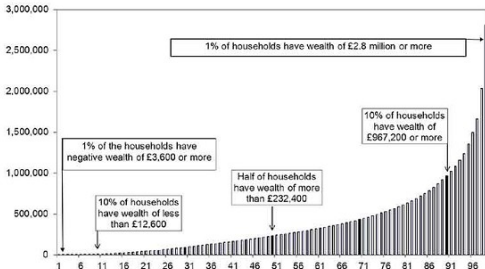


Figure 1: Distribution of total wealth between households, 2008-10, GB



Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),
- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori, stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),
- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottnan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori,
- stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),
- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottnan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori,
- stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus

fluktuációk

Makroszkopikus

fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és

kontrollparaméter

Előrendű és

folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),

- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottnan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori,
- stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),
- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottnan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori,
- stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf-törvény

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó

eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

- Jean-Baptiste Estoup (1868–1950),
- George Kingsley Zipf (1902–1950):

A szavak frekvenciája fordítottan arányos a gyakoriság szerinti sorrendben elfoglalt helyezésükkel:

- a második leggyakrabban szó fele olyan gyakori, mint a leggyakrabban,
- a harmadik leggyakrabban harmad olyan gyakori,
- stb.



G. K. Zipf

$$p(k) = \frac{C}{k^\gamma}, \quad C = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\gamma}, \quad (\gamma = 1)$$

Zipf–törvény

Szavak

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

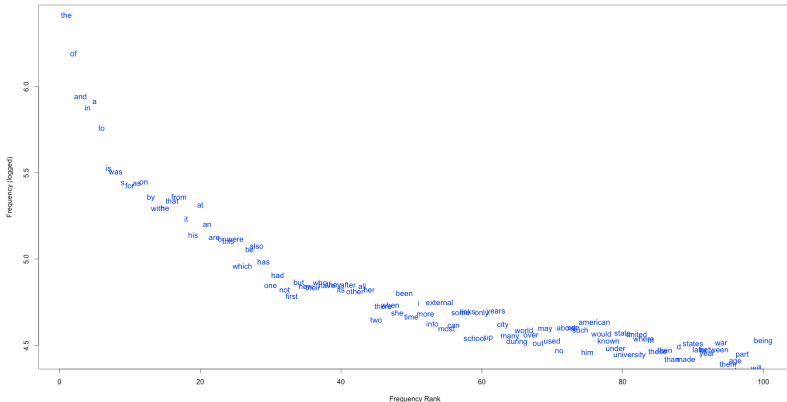
Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Elsődrendű és
folytonos
A kritikus pont

100 Most Frequent Words in Wikipedia



Zipf-törvény

Szavak

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

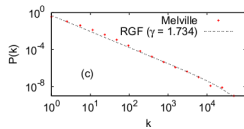
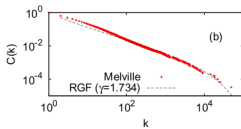
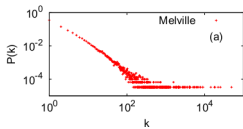
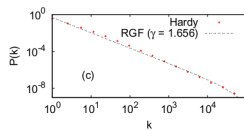
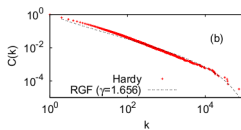
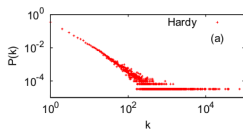
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőröndű és
folytonos

A kritikus pont



Zipf-törvény

Családnevek

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

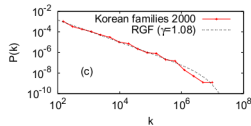
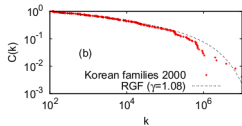
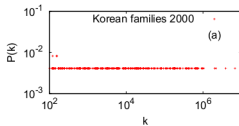
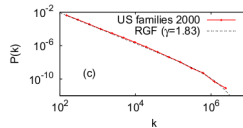
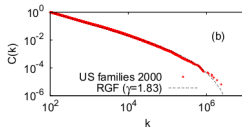
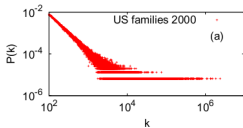
Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont



Zipf-törvény

Városok, megyék

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

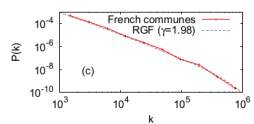
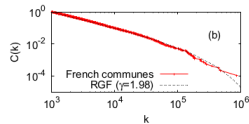
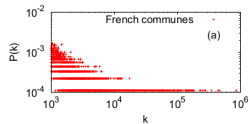
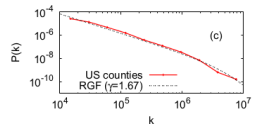
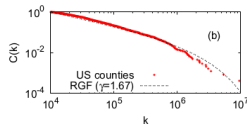
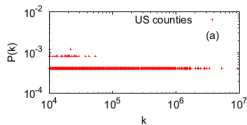
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrrendű és
folytonos

A kritikus pont



Zipf-törvény

Genom

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

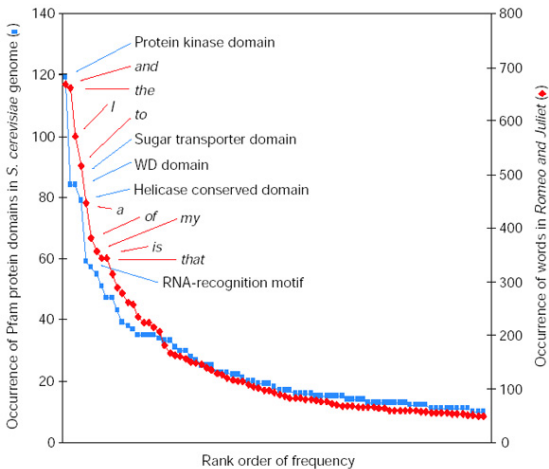
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont



További skálázó eloszlások a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Halrajok és egyéb állatcsoportok méreteloszlása.
- Rendszertanban adott genus-hoz tartozó fajok számának eloszlása.
- Fehérje kölcsönhatás: egy fehérje hány másikkal képes fizikai kölcsönhatásba lépni.
- Ha a tüdőbe levegőt próbálunk egyenletesen bepumpálni, a tüdő által kifejtett ellenállás időben nem egyenletesen változik, hanem ugrásokban, ezek méretének eloszlása szintén skálázó.
- ...

További skálázó eloszlások a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Halrajok és egyéb állatcsoportok méreteloszlása.
- Rendszertanban adott genus-hoz tartozó fajok számának eloszlása.
- Fehérje kölcsönhatás: egy fehérje hány másikkal képes fizikai kölcsönhatásba lépni.
- Ha a tüdőbe levegőt próbálunk egyenletesen bepumpálni, a tüdő által kifejtett ellenállás időben nem egyenletesen változik, hanem ugrásokban, ezek méretének eloszlása szintén skálázó.
- ...

További skálázó eloszlások a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Halrajok és egyéb állatcsoportok méreteloszlása.
- Rendszertanban adott genus-hoz tartozó fajok számának eloszlása.
- Fehérje kölcsönhatás: egy fehérje hány másikkal képes fizikai kölcsönhatásba lépni.
- Ha a tüdőbe levegőt próbálunk egyenletesen bepumpálni, a tüdő által kifejtett ellenállás időben nem egyenletesen változik, hanem ugrásokban, ezek méretének eloszlása szintén skálázó.
- ...

További skálázó eloszlások a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Halrajok és egyéb állatcsoportok méreteloszlása.
- Rendszertanban adott genus-hoz tartozó fajok számának eloszlása.
- Fehérje kölcsönhatás: egy fehérje hány másikkal képes fizikai kölcsönhatásba lépni.
- Ha a tüdőbe levegőt próbálunk egyenletesen bepumpálni, a tüdő által kifejtett ellenállás időben nem egyenletesen változik, hanem úgrásokban, ezek méretének eloszlása szintén skálázó.
- ...

További skálázó eloszlások a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Halrajok és egyéb állatcsoportok méreteloszlása.
- Rendszertanban adott genus-hoz tartozó fajok számának eloszlása.
- Fehérje kölcsönhatás: egy fehérje hány másikkal képes fizikai kölcsönhatásba lépni.
- Ha a tüdőbe levegőt próbálunk egyenletesen bepumpálni, a tüdő által kifejtett ellenállás időben nem egyenletesen változik, hanem úgrásokban, ezek méretének eloszlása szintén skálázó.
- ...

Hatvány fgv. vs lognormális

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

VIGYÁZAT!

A gyakorlatban a hatványfüggvény szerint lecsengő- és a lognormális eloszlás nagyon hasonlíthat egymásra!

Lognormális eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Lognormális eloszlás

Definíció: A ξ valószínűségi változó eloszlása **lognormális**, ha az $\eta = \ln \xi$ változó eloszlása normális:

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-\mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}}, \quad y = \ln x, \quad x = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\rightarrow \rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 x} e^{-\frac{(\ln x - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}},$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\ln x' - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}} \frac{1}{x'} dx' = \xrightarrow{z = \frac{\ln x' - \mu_0}{\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$\rightarrow F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right],$$

(azaz a ξ eloszlása logaritmus skálán normális.)

Lognormális eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Lognormális eloszlás

Definíció: A ξ valószínűségi változó eloszlása **lognormális**, ha az $\eta = \ln \xi$ változó eloszlása normális:

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-\mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}}, \quad y = \ln x, \quad x = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\rightarrow \rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 x} e^{-\frac{(\ln x - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}},$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\ln x' - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}} \frac{1}{x'} dx' = \xrightarrow{z = \frac{\ln x' - \mu_0}{\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$\rightarrow F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right],$$

(azaz a ξ eloszlása logaritmikus skálán normális.)

Lognormális eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendő és
folytonos

A kritikus pont

Lognormális eloszlás

Definíció: A ξ valószínűségi változó eloszlása **lognormális**, ha az $\eta = \ln \xi$ változó eloszlása normális:

$$\rho_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-\mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}}, \quad y = \ln x, \quad x = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\rightarrow \rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 x} e^{-\frac{(\ln x - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}},$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\ln x' - \mu_0)^2}{2(\sigma_0)^2}} \frac{1}{x'} dx' = \xrightarrow{z = \frac{\ln x' - \mu_0}{\sigma_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$\rightarrow F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_0}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{(\ln x - \mu_0)}{\sqrt{2}\sigma_0}\right) \right],$$

(azaz a ξ eloszlása logaritmikus skálán normális.)

Lognormális eloszlás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

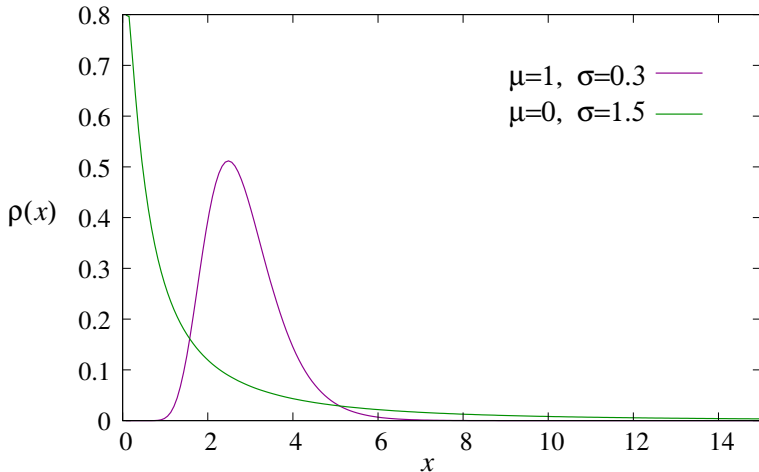
Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

A lognormális eloszlás sűrűségfüggvénye:



Lognormális eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Eleőrendű és
folytonos

A kritikus pont

Hol fordul elő?

- **Biológiában:**
 - szövetekben pl. sejtmag méret eloszlás,
 - haj, köröm, fogak hosszúsága,
 - vérnyomás,
- Tőzsdei árindexek,
- (Rekurzív) törési folyamatoknál a kapott darabok méreteloszlása,
- stb.

Lognormális eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Hol fordul elő?

- **Biológiában:**
 - szövetekben pl. sejtmag méret eloszlás,
 - haj, köröm, fogak hosszúsága,
 - vérnyomás,
- **Tőzsdei árindexek,**
- (Rekurzív) törési folyamatoknál a kapott darabok méreteloszlása,
- stb.

Lognormális eloszlás

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

Hol fordul elő?

- **Biológiában:**
 - szövetekben pl. sejtmag méret eloszlás,
 - haj, köröm, fogak hosszúsága,
 - vérnyomás,
- Tőzsdei árindexek,
- (Rekurzív) törési folyamatoknál a kapott darabok méreteloszlása,
- stb.

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

FLUKTUÁCIÓK

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Elsőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Mi a fluktuáció?

Mi a **fluktuáció**?

- Ha egy mennyiség időben egy jól meghatározott átlag körül kis mértékben ingadozik, ezt szoktuk fluktuációnak hívni.

Mi a **fluktuáció**?

- Ha egy mennyiség időben egy jól meghatározott átlag körül kis mértékben ingadozik, ezt szoktuk fluktuációnak hívni.
- Vagy ha egy sokaságból mintavételezünk, és a kapott minták értéke ingadozik kis mértékben egy jól meghatározott átlag körül, azt is szoktuk fluktuációnak hívni.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Fluktuációk a biológiában

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Azonos fajhoz tartozó egyedek.
- Élettani folyamatok:
 - pulzus,
 - vérnyomás,
 - légzés,
 - EKG,
 - stb.
- Állat- vagy növény populációk mérete.
- stb.

Mikroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Termikus fluktuációk:

- Az atomok és molekulák minden mozgási szabadság fokához $\frac{1}{2}kT$ kinetikus energia társul.
- Ennek révén pl. egy kristály rácsban az atomok nem az egyensúlyi helyükön ülnek, hanem akörül „rezegnek”.

● A termikus fluktuációkat korrelálatlan (fehér) zajként szoktuk figyelembe venni:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

Mikroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Termikus fluktuációk:

- Az atomok és molekulák minden mozgási szabadság fokához $\frac{1}{2}kT$ kinetikus energia társul.
- Ennek révén pl. egy kristály rácsban az atomok nem az egyensúlyi helyükön ülnek, hanem akörül „rezegnek”.

● A termikus fluktuációkat korrelálatlan (fehér) zajként szoktuk figyelembe venni:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

Mikroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Termikus fluktuációk:

- Az atomok és molekulák minden mozgási szabadság fokához $\frac{1}{2}kT$ kinetikus energia társul.
- Ennek révén pl. egy kristály rácsban az atomok nem az egyensúlyi helyükön ülnek, hanem akörül „rezegnek”.

● A termikus fluktuációkat korrelálatlan (fehér) zajként szoktuk figyelembe venni:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

Mikroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

● Termikus fluktuációk:

- Az atomok és molekulák minden mozgási szabadság fokához $\frac{1}{2}kT$ kinetikus energia társul.
- Ennek révén pl. egy kristály rácsban az atomok nem az egyensúlyi helyükön ülnek, hanem akörül „rezegnek”.

● A termikus fluktuációkat korrelálatlan (fehér) zajként szoktuk figyelembe venni:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

Mikroszkopikus fluktuációk és transzport

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Előrendű és folytonos

A kritikus pont

- Bizonyos motor proteinek mint pl. a kinezin képes egy irányban végigmenni egy mikrotubuluson.

<https://www.youtube.com/watch?v=y-uuk4Pr2i8>

Mikroszkopikus fluktuációk és transzport

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Előrendű és folytonos

A kritikus pont

- Bizonyos motor proteinek mint pl. a kinezin képes egy irányban végigmenni egy mikrotubuluson.

<https://www.youtube.com/watch?v=y-uuk4Pr2i8>

- Ezt a legegyszerűbb úgy modellezni, mint részecskék Brown-mozgását egy ki-be kapcsolt fűrészpoteenciálban.

Mikroszkopikus fluktuációk és transzport

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

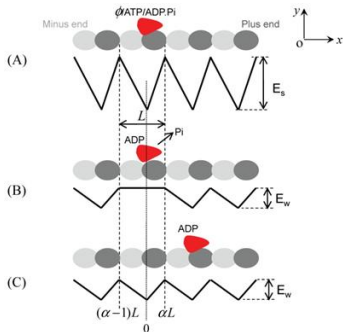
Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Bizonyos motor proteinek mint pl. a kinezin képes egy irányban végigmenni egy mikrotubuluson.

<https://www.youtube.com/watch?v=y-uuk4Pr2i8>

- Ezt a legegyszerűbb úgy modellezni, mint részecskék Brown-mozgását egy ki-be kapcsolt fűrészpotenciálban.



<http://www.ijbs.com/v06p0665.htm>

Mikroszkopikus fluktuációk és transzport

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus fluktuációk
Makroszkopikus fluktuációk

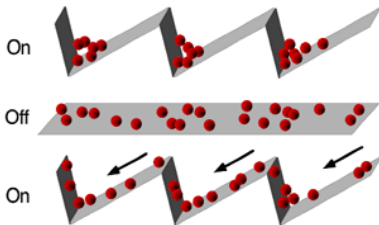
Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter
Eleőrendő és folytonos
A kritikus pont

- Bizonyos motor proteinek mint pl. a kinezin képes egy irányban végigmenni egy mikrotubuluson.

<https://www.youtube.com/watch?v=y-uuk4Pr2i8>

- Ezt a legegyszerűbb úgy modellezni, mint részecskék Brown-mozgását egy ki-be kapcsolt fűrészpotenciálban.



<http://physics.aps.org/story/v26/st22>

Makroszkopikus fluktuációk

Honnan származnak a makroszkopikus fluktuációk?

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Makroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

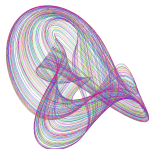
Makroszkopikus fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Honnan származnak a makroszkopikus fluktuációk?

- **Nemlineáris dinamika és káosz:**
Determinisztikus rendszer is mutathat nagyon bonyolult viselkedést, ha nemlineáris a dinamika és/vagy nagyon sok elem hat kölcsön. (Ez a bonyolult viselkedés tűnhet sztochasztikusnak).



Makroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

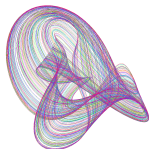
Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Honnan származnak a makroszkopikus fluktuációk?

- **Nemlineáris dinamika és káosz:**

Determinisztikus rendszer is mutathat nagyon bonyolult viselkedést, ha nemlineáris a dinamika és/vagy nagyon sok elem hat kölcsön. (Ez a bonyolult viselkedés tűnhet sztochasztikusnak).



- Sok mikroszkopikus egység egymással kölcsönhatva képes makroszkopikus effektust produkálni, ez általában egy **FÁZISÁTALAKULÁS**.

Makroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

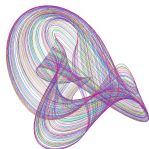
Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőröndű és
folytonos
A kritikus pont

Honnan származnak a makroszkopikus fluktuációk?

- **Nemlineáris dinamika és káosz:**

Determinisztikus rendszer is mutathat nagyon bonyolult viselkedést, ha nemlineáris a dinamika és/vagy nagyon sok elem hat kölcsön. (Ez a bonyolult viselkedés tűnhet sztochasztikusnak).



- Sok mikroszkopikus egység egymással kölcsönhatva képes makroszkopikus effektust produkálni, ez általában egy **FÁZISÁTALAKULÁS**.
- A fázisátalakulás **kritikus pontjánál:**
 - nagy fluktuációk,
 - skálázó eloszlások.

Makroszkopikus fluktuációk

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus fluktuációk

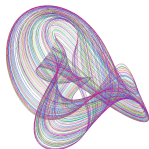
Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőröndű és
folytonos
A kritikus pont

Honnan származnak a makroszkopikus fluktuációk?

● **Nemlineáris dinamika és káosz:**

Determinisztikus rendszer is mutathat nagyon bonyolult viselkedést, ha nemlineáris a dinamika és/vagy nagyon sok elem hat kölcsön. (Ez a bonyolult viselkedés tűnhet sztochasztikusnak).



● Sok mikroszkopikus egység egymással kölcsönhatva képes makroszkopikus effektust produkálni, ez általában egy **FÁZISÁTALAKULÁS**.

● A fázisátalakulás **kritikus pontjánál:**

- nagy fluktuációk,
- skálázó eloszlások.

● **Önszervező kritikusság:** bizonyos rendszerek esetén ez a kritikus pont attraktorként viselkedik, azaz a rendszer dinamikája olyan, hogy a külső paraméterek változtatása nélkül is a kritikus pont felé halad.

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

FÁZISÁTALAKULÁSOK

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,
- a ferromágneses átalakulás a Curie-pontnál,

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,
- a ferromágneses átalakulás a Curie-pontnál,
- perkolációs átalakulás,

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,
- a ferromágneses átalakulás a Curie-pontnál,
- perkolációs átalakulás,
- szupravezetés,

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,
- a ferromágneses átalakulás a Curie-pontnál,
- perkolációs átalakulás,
- szupravezetés,
- Bose–Einstein-kondenzáció,

Fázisátalakulások

Példák

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

Néhány példa fázisátalakulásra:

- víz megfagyása vagy felforrása,
- a ferromágneses átalakulás a Curie-pontnál,
- perkolációs átalakulás,
- szupravezetés,
- Bose–Einstein-kondenzáció,
- stb.

Fázisátalakulás leírása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Két fázis: „rendezetlen” és „rendezett”.

Fázisátalakulás leírása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Elsőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- Két fázis: „rendezetlen” és „rendezett”.
- Általában a rendezett fázis esetén valamilyen szimmetria sérül.

Fázisátalakulás leírása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Két fázis: „rendezetlen” és „rendezett”.
- Általában a rendezett fázis esetén valamilyen szimmetria sérül.
- **Rendparaméter**, m : a rendezetlen fázisban $m = 0$, a rendezett fázisban $m > 0$.

Fázisátalakulás leírása

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció

Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás

Skálázó eloszlás

Példák

Fluktuációk

Biológiai példák

Mikroszkopikus
fluktuációk

Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és kontrollparaméter

Előrendű és
folytonos

A kritikus pont

- Két fázis: „rendezetlen” és „rendezett”.
- Általában a rendezett fázis esetén valamilyen szimmetria sérül.
- **Rendparaméter**, m : a rendezetlen fázisban $m = 0$, a rendezett fázisban $m > 0$.
- **Kontrollparaméter**: pl. hőmérséklet, T , sűrűség, ρ , stb. Ennek változtatásával lehet a rendszert átvinni egyik fázisból a másikba.

Fázisátalakulások

Osztályozás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

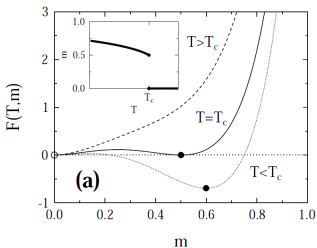
Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Elsőrendű és
folytonos

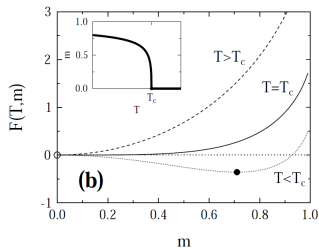
A kritikus pont

Alapvetően két fajta fázisátalakulás:



ELSŐRENDŰ:

- m ugrásszerűen változik,
- a két fázis egyszerre létezik egymás mellett,
- az átalakulásnál a rendszer hőt vesz fel vagy hőt ad le hőmérséklet-változás nélkül,



FOLYTONOS:

- m folytonosan változik,
- a kritikus pontban divergáló szuszeptibilitás: a rendszer végtelenül érzékeny lesz a külső zavarokra, egy minimális külső tér is makroszkopikus választ okoz.

Folytonos fázisátalakulás

Skálázás,
fluktuációk,
fázisátalakulások

Skálázás
Definíció
Allometric scaling

Skálázó
eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk
Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk

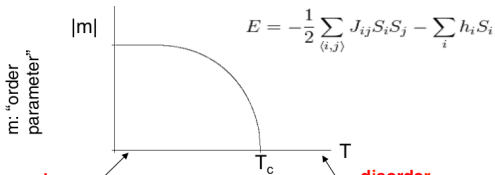
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter

Elsőrendű és
folytonos

A kritikus pont



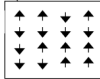
order



$$M(T - T_c, 0) \sim (T_c - T)^\beta$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

disorder



$T = 0.99 T_c$



$T = 0.999$



$T = T_c$



$T = 1.5 T_c$



$T = 2 T_c$



A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

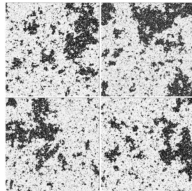
Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendő és
folytonos
A kritikus pont

- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: *scale-free behavior*

A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

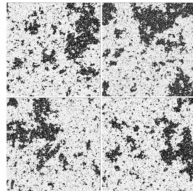
- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

- Azonban a kritikus pontban a korreláció nem exponenciálisan cseng le, hanem **hatványszerűen**, azaz skálázik!

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: **scale-free behavior**

A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

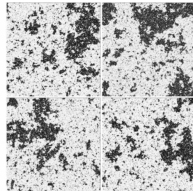
$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

- Azonban a kritikus pontban a korreláció nem exponenciálisan cseng le, hanem **hatványszerűen**, azaz skálázik!

→ A korrelációs hossz a kritikus pontban **divergál!**

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: *scale-free behavior*

A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

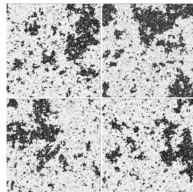
- Azonban a kritikus pontban a korreláció nem exponenciálisan cseng le, hanem **hatványszerűen**, azaz skálázik!

→ A korrelációs hossz a kritikus pontban **divergál!**

- A kritikus ponthoz közel a korrelációs hossz is skálázik,
 $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$.

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: *scale-free behavior*

A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Elsőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

- Azonban a kritikus pontban a korreláció nem exponenciálisan cseng le, hanem **hatványszerűen**, azaz skálázik!

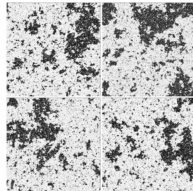
→ A korrelációs hossz a kritikus pontban **divergál!**

- A kritikus ponthoz közel a korrelációs hossz is skálázik,
 $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$.
- A doménméreteloszlás is hatványszerű, a domének önhasonló
struktúrát mutatnak több nagyságrenden keresztül.

<https://www.youtube.com/watch?v=lQxD1PinDbs>

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: **scale-free behavior**

A kritikus pontnál

Skálázás, fluktuációk, fázisátalakulások

Skálázás

Definíció
Allometric scaling

Skálázó eloszlások

Eloszlás
Skálázó eloszlás
Példák

Fluktuációk

Biológiai példák
Mikroszkopikus
fluktuációk
Makroszkopikus
fluktuációk

Fázisátalakulások

Rendparaméter és
kontrollparaméter
Eleőrendű és
folytonos
A kritikus pont

- A korrelációs hossz, ξ definíciója:

$$\langle s(x)s(y) \rangle \sim e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}.$$

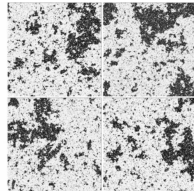
- Azonban a kritikus pontban a korreláció nem exponenciálisan cseng le, hanem **hatványszerűen**, azaz skálázik!

→ A korrelációs hossz a kritikus pontban **divergál!**

- A kritikus ponthoz közel a korrelációs hossz is skálázik, $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$.
- A doménméreteloszlás is hatványszerű, a domének önhasznó struktúrát mutatnak több nagyságrenden keresztül.
<https://www.youtube.com/watch?v=lQxD1PinDbs>
- Univerzalitás: sok különböző fázisátalakulásnál ugyanazok az exponensek írják le a kritikus pont körüli viselkedést.

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

At $T = T_c$: correlation length diverges



Fluctuations emerge at all scales: **scale-free behavior**

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

FRAKTÁLOK: DEFINÍCIÓK, (DIMENZIÓK, KORRELÁCIÓS FÜGGVÉNYEK) TÍPUSAIK, DIMENZIÓK KÖZTI ÖSSZEFÜGGÉSEK

Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimensió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimensió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

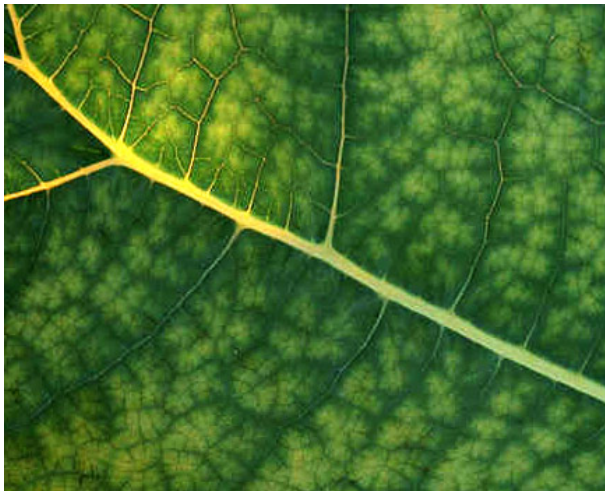
Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Példák a természetben

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Geometriai példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

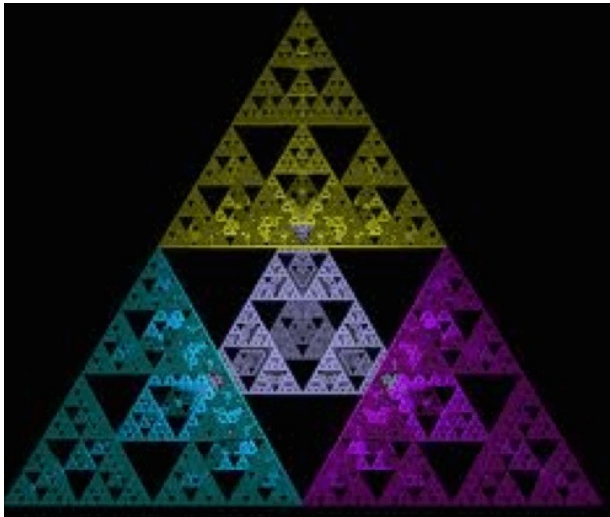
Önaffin fraktálok

Anizotropia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Geometriai példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

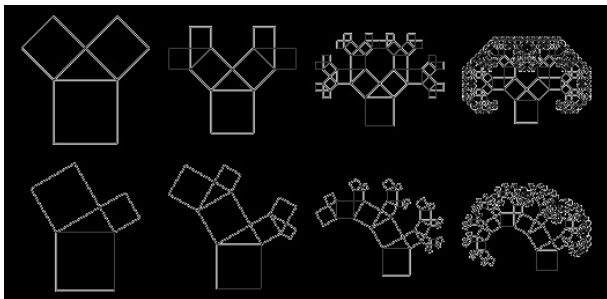
Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Geometriai példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

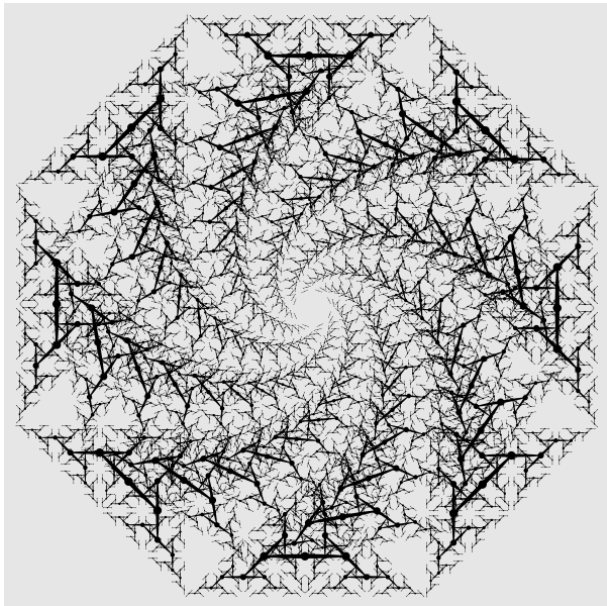
Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Geometriai példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

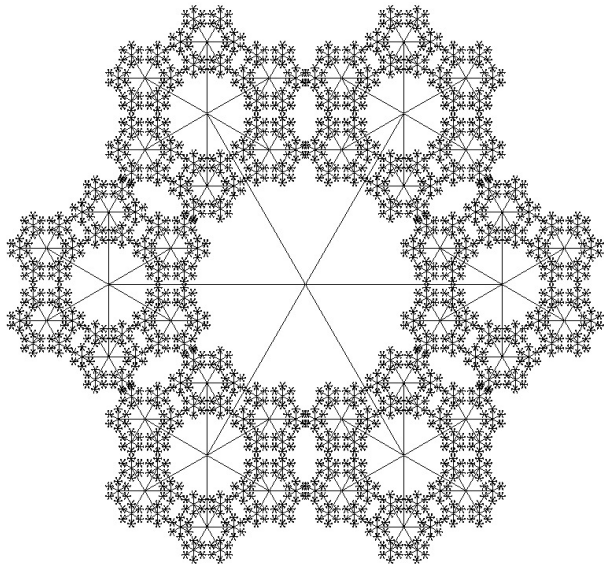
Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Mandelbrot-halmazok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

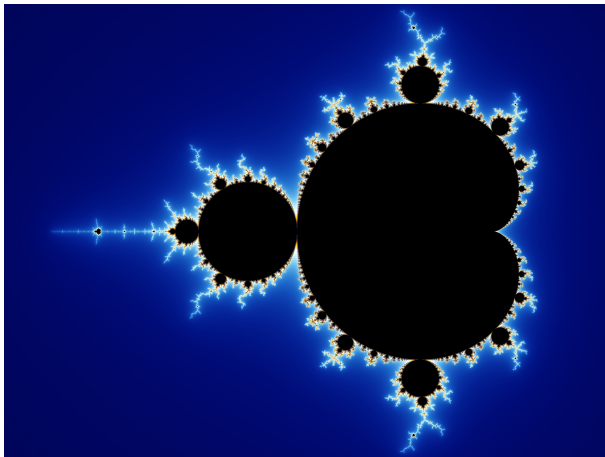
Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Fraktálok

Mandelbrot-halmazok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

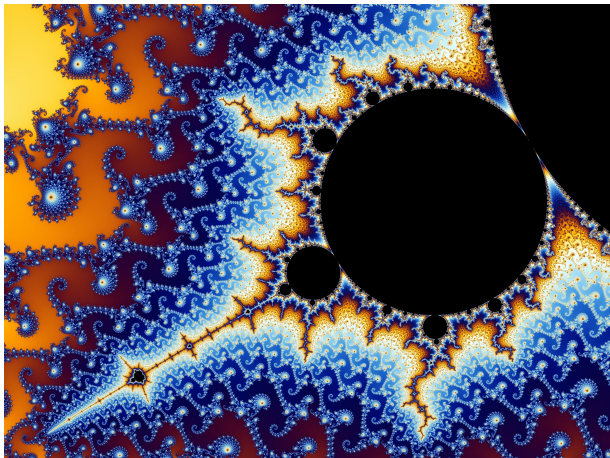
Önaffin fraktálok

Anizotropia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

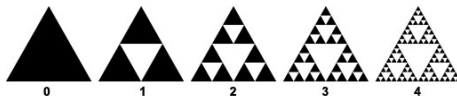
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál rajzolás I. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Rekurzívan lecseréljük az alakzat részeit „saját magával”.



(Sierpinski-háromszög)

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

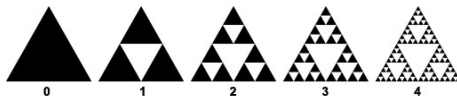
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál rajzolás I. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Rekurzívan lecseréljük az alakzat részeit „saját magával”.



(Sierpinski-háromszög)

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia

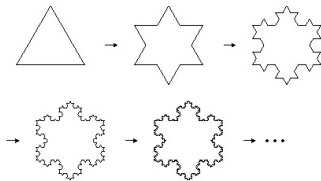
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál rajzolás I. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Rekurzívan lecseréljük az alakzat részeit „saját magával”.



Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenszió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

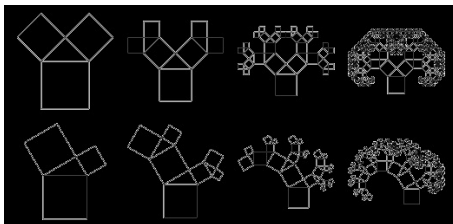
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenszió mérése

Fraktál rajzolás I. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Rekurzívan lecseréljük az alakzat részeit „saját magával”.



Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál rajzolás II. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Adott geometria szerint rekurzívan növeljük az ábrát „saját magával”.



Hogyan rajzoljunk fraktált?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

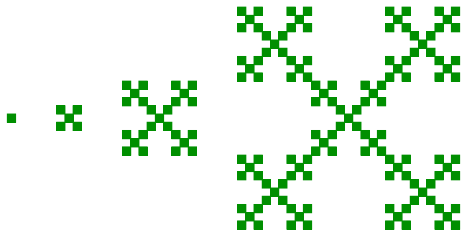
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál rajzolás II. módszere

- Egy egyszerű geometriai alakzattól indulunk ki.
- Adott geometria szerint rekurzívan növeljük az ábrát „saját magával”.



Miért különlegesek a fraktálok?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Miért különlegesek a fraktálok?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimensió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A^H exponens

A fraktáldimensió
mérése

- Mérjük meg a pl. Brit-szigetek területét!



Miért különlegesek a fraktálok?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimensió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A^H exponens

A fraktáldimensió
mérése

- Mérjük meg a pl. Brit-szigetek területét!



Minél nagyobb felbontású térképet használunk, annál nagyobb értéket mérünk!

Miért különlegesek a fraktálok?

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimensió

Dimenziók közti
összefüggések

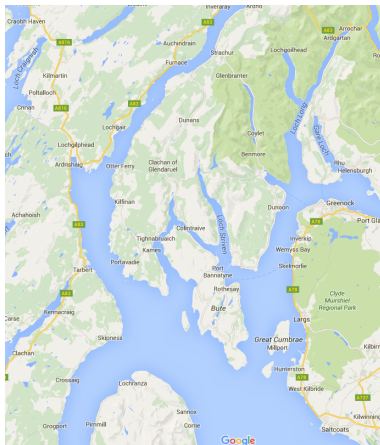
Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
 $A \propto H^{\text{exponens}}$

A fraktáldimensió
mérése

- Mérjük meg a pl. Brit-szigetek területét!



Minél nagyobb felbontású térképet használunk, annál nagyobb értéket mérünk!

Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

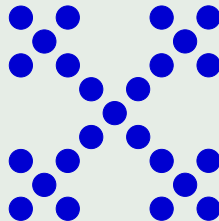
Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

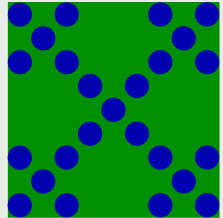
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

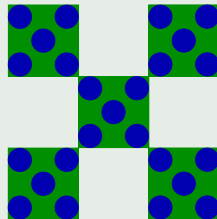
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

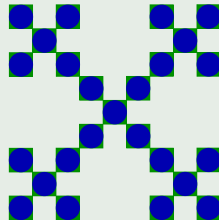
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

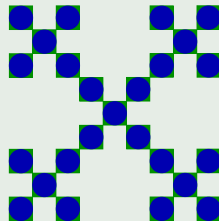
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .
- Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

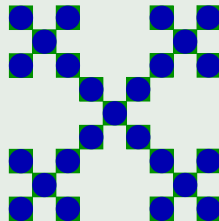
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .
 - Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.
- Az alakzat térfogata: $V(\ell) = N(\ell) \cdot \ell^d$.



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

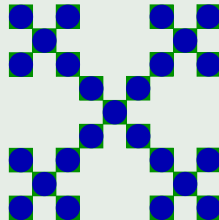
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .
 - Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.
- Az alakzat térfogata: $V(\ell) = N(\ell) \cdot \ell^d$.
- „Hagyományos” alakzatok: az ℓ csökkentésével $V(\ell)$ gyorsan konvergál egy jól definiált értékhez.



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimensió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

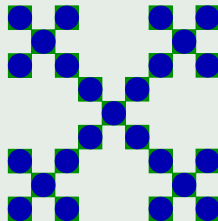
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimensió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .
 - Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.
- Az alakzat térfogata: $V(\ell) = N(\ell) \cdot \ell^d$.



- „Hagyományos” alakzatok: az ℓ csökkentésével $V(\ell)$ gyorsan konvergál egy jól definiált értékhez.
- **Fraktálok:**
 - Ha $\ell \rightarrow 0$, akkor $V(\ell) \rightarrow 0$ úgyszintén!

Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

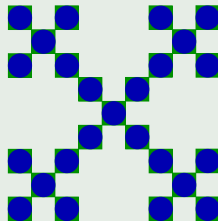
Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .
 - Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.
- Az alakzat térfogata: $V(\ell) = N(\ell) \cdot \ell^d$.
- „Hagyományos” alakzatok: az ℓ csökkentésével $V(\ell)$ gyorsan konvergál egy jól definiált értékhez.
 - **Fraktálok:**
 - Ha $\ell \rightarrow 0$, akkor $V(\ell) \rightarrow 0$ úgyszintén!
 - Viszont ha $d - 1$ dimenziós kockákkal lemérjük a „felületüket” (kerületüket, hosszukat):
ha $\ell \rightarrow 0$, akkor $S(\ell) \rightarrow \infty$.



Anomális térfogat, terület, kerület, hossz

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenszió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenszió
mérése

A térfogat (terület, hossz, stb.) mérése

- Ha az adott alakzat d dimenziós térbe van beágyazva, akkor lefedjük ℓ élhosszúságú d dimenziós kockákkal, melyeknek a térfogata egyenként ℓ^d .

- Legyen a lefedéshez szükséges dobozok minimális száma $N(\ell)$.

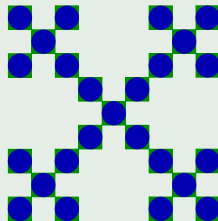
→ Az alakzat térfogata: $V(\ell) = N(\ell) \cdot \ell^d$.

- „Hagyományos” alakzatok: az ℓ csökkentésével $V(\ell)$ gyorsan konvergál egy jól definiált értékhez.

- **Fraktálok:**

- Ha $\ell \rightarrow 0$, akkor $V(\ell) \rightarrow 0$ úgyszintén!
- Viszont ha $d - 1$ dimenziós kockákkal lemérjük a „felületüket” (kerületüket, hosszukat):
ha $\ell \rightarrow 0$, akkor $S(\ell) \rightarrow \infty$.

→ A fraktálok tört dimenzióval rendelkező alakzatok.



Fraktál „definíciója”

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál

- A fraktál egy önazonos geometriával rendelkező alakzat,
- melynél az alakzat lefedéséhez szükséges ℓ lineáris hosszúságú térfogategységek (doboz, gömb, stb.) $N(\ell)$ száma nemtriviális módon skálázik ℓ -el:

$$N(\ell) \sim \ell^{-D},$$

ahol D nem egész.

- **FONTOS!**
 - A biológiában, természetben előforduló fraktáloknál van egy alsó- és felső mérethatár, amiken belül érvényes az önazonosság és a skálázás.
 - Felső határ: legtöbbször az alakzat (levél, hópehely, stb.) mérete.
 - Alsó határ: pl. sejtek, vagy egyéb elemi alkotórészek mérete.

Fraktál „definíciója”

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál

- A fraktál egy önazonos geometriával rendelkező alakzat,
- melynél az alakzat lefedéséhez szükséges ℓ lineáris hosszúságú térfogategységek (doboz, gömb, stb.) $N(\ell)$ száma nemtriviális módon skálázik ℓ -el:

$$N(\ell) \sim \ell^{-D},$$

ahol D nem egész.

- **FONTOS!**
 - A biológiában, természetben előforduló fraktáloknál van egy alsó- és felső mérethatár, amiken belül érvényes az önazonosság és a skálázás.
 - Felső határ: legtöbbször az alakzat (levél, hópehely, stb.) mérete.
 - Alsó határ: pl. sejtek, vagy egyéb elemi alkotórészek mérete.

Fraktál „definíciója”

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál

- A fraktál egy önazonos geometriával rendelkező alakzat,
- melynél az alakzat lefedéséhez szükséges l lineáris hosszúságú térfogategységek (doboz, gömb, stb.) $N(l)$ száma nemtriviális módon skálázik l -el:

$$N(l) \sim l^{-D},$$

ahol D nem egész.

- **FONTOS!**

- A biológiában, természetben előforduló fraktáloknál van egy alsó- és felső mérethatár, amiken belül érvényes az önazonosság és a skálázás.
- Felső határ: legtöbbször az alakzat (levél, hópehely, stb.) mérete.
- Alsó határ: pl. sejtek, vagy egyéb elemi alkotórészek mérete.

Fraktál „definíciója”

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Fraktál

- A fraktál egy önazonos geometriával rendelkező alakzat,
- melynél az alakzat lefedéséhez szükséges l lineáris hosszúságú térfogategységek (doboz, gömb, stb.) $N(l)$ száma nemtriviális módon skálázik l -el:

$$N(l) \sim l^{-D},$$

ahol D nem egész.

- **FONTOS!**

- A biológiában, természetben előforduló fraktáloknál van egy alsó- és felső mérethatár, amiken belül érvényes az önazonosság és a skálázás.
- Felső határ: legtöbbször az alakzat (levél, hópehely, stb.) mérete.
- Alsó határ: pl. sejtek, vagy egyéb elemi alkotórészek mérete.

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Fraktáldimenzió

- Ha a fraktál lefedéséhez szükséges ℓ lineáris méretű egységek (dobozok) száma $N(\ell)$, akkor a fraktáldimenzió

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}.$$

- Növekvő fraktálok esetén (pl. II. rajzolósi módszer) általában adott egy kiinduló minimális elemi egység méret, ℓ :
 - Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a méretskálát úgy, hogy $\ell = 1$ legyen.
 - A lefedéshez használt dobozok méretét itt nem változtatjuk, a dobozok száma az alakzat L lineáris méretével $N(L) \sim L^D$ szerint skálázik.
- Ilyen esetben a fraktáldimenzió:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}.$$

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Fraktáldimenzió

- Ha a fraktál lefedéséhez szükséges ℓ lineáris méretű egységek (dobozok) száma $N(\ell)$, akkor a fraktáldimenzió

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}.$$

- Növekvő fraktálok esetén (pl. II. rajzolósi módszer) általában adott egy kiinduló minimális elemi egység méret, ℓ :
 - Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a méretskálát úgy, hogy $\ell = 1$ legyen.
 - A lefedéshez használt dobozok méretét itt nem változtatjuk, a dobozok száma az alakzat L lineáris méretével $N(L) \sim L^D$ szerint skálázik.
- Ilyen esetben a fraktáldimenzió:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}.$$

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Fraktáldimenzió

- Ha a fraktál lefedéséhez szükséges ℓ lineáris méretű egységek (dobozok) száma $N(\ell)$, akkor a fraktáldimenzió

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}.$$

- Növekvő fraktálok esetén (pl. II. rajzolósi módszer) általában adott egy kiinduló minimális elemi egység méret, ℓ :
 - Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a méretskálát úgy, hogy $\ell = 1$ legyen.
 - A lefedéshez használt dobozok méretét itt nem változtatjuk, a dobozok száma az alakzat L lineáris méretével $N(L) \sim L^D$ szerint skálázik.
- Ilyen esetben a fraktáldimenzió:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}.$$

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Fraktáldimenzió

- Ha a fraktál lefedéséhez szükséges ℓ lineáris méretű egységek (dobozok) száma $N(\ell)$, akkor a fraktáldimenzió

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}.$$

- Növekvő fraktálok esetén (pl. II. rajzolósi módszer) általában adott egy kiinduló minimális elemi egység méret, ℓ :
 - Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a méretskálát úgy, hogy $\ell = 1$ legyen.
 - A lefedéshez használt dobozok méretét itt nem változtatjuk, a dobozok száma az alakzat L lineáris méretével $N(L) \sim L^D$ szerint skálázik.

→ Ilyen esetben a fraktáldimenzió:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}.$$

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Fraktáldimenzió

- Ha a fraktál lefedéséhez szükséges ℓ lineáris méretű egységek (dobozok) száma $N(\ell)$, akkor a fraktáldimenzió

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}.$$

- Növekvő fraktálok esetén (pl. II. rajzolósi módszer) általában adott egy kiinduló minimális elemi egység méret, ℓ :
 - Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a méretskálát úgy, hogy $\ell = 1$ legyen.
 - A lefedéshez használt dobozok méretét itt nem változtatjuk, a dobozok száma az alakzat L lineáris méretével $N(L) \sim L^D$ szerint skálázik.
- Ilyen esetben a fraktáldimenzió:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}.$$

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

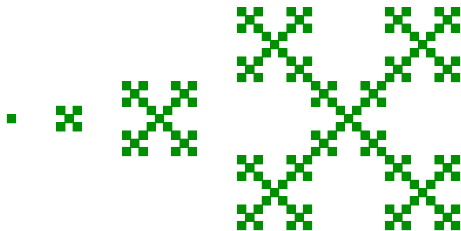
Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Példa: számoljuk ki a fraktáldimenziót az alábbi példánál!



Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

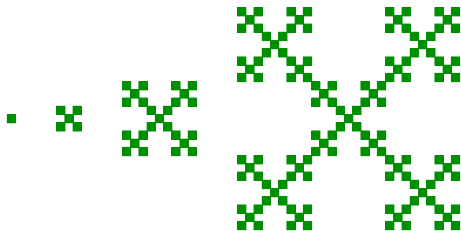
Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Példa: számoljuk ki a fraktáldimenziót az alábbi példánál!



- Jelöljük k -val az iterációk számát.

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

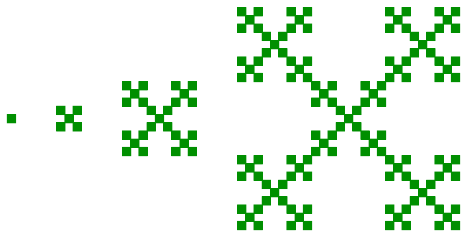
Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Példa: számoljuk ki a fraktáldimenziót az alábbi példánál!



- Jelöljük k -val az iterációk számát.
- A fraktál lineáris mérete $L = 3^k$, az elemi egységek száma $N(L) = 5^k$, ennél fogva

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

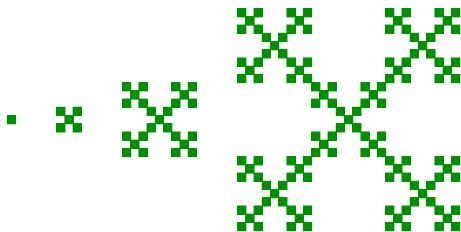
Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Példa: számoljuk ki a fraktáldimenziót az alábbi példánál!



- Jelöljük k -val az iterációk számát.
- A fraktál lineáris mérete $L = 3^k$, az elemi egységek száma $N(L) = 5^k$, ennélfogva

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^k)}{\ln(3^k)} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465\dots$$

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s altérre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s alterre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):
 - ha $d_s > D$, akkor a vetület továbbra is $D_p = D$ dimenziós marad,
 - ha $d_s < D$, akkor a fraktál kitölti az alteret és $D_p = d_s$.

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s altérre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):
 - ha $d_s > D$, akkor a vetület továbbra is $D_p = D$ dimenziós marad,
 - ha $d_s < D$, akkor a fraktál kitölti az alteret és $D_p = d_s$.
- Ha vesszük egy D_A és egy D_B dimenziójú fraktál unióját ahol $D_A > D_B$,

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s altérre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):
 - ha $d_s > D$, akkor a vetület továbbra is $D_p = D$ dimenziós marad,
 - ha $d_s < D$, akkor a fraktál kitölti az alteret és $D_p = d_s$.
- Ha vesszük egy D_A és egy D_B dimenziójú fraktál unióját ahol $D_A > D_B$, akkor az eredmény $D_{A \cup B} = D_A$ dimenziós lesz.

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s altérre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):
 - ha $d_s > D$, akkor a vetület továbbra is $D_p = D$ dimenziós marad,
 - ha $d_s < D$, akkor a fraktál kitölti az alteret és $D_p = d_s$.
- Ha vesszük egy D_A és egy D_B dimenziójú fraktál unióját ahol $D_A > D_B$, akkor az eredmény $D_{A \cup B} = D_A$ dimenziós lesz.
- Ha vesszük D_A és egy D_B dimenziójú fraktál metszetét, akkor az eredmény $D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$ dimenziós lesz:

Fraktáldimenzió tulajdonságai

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Ha egy d dimenzióba beágyazott D dimenziós fraktált levetítünk egy d_s alterre, (pl. csinálunk egy fotót egy 3d-be ágyazott fraktálról):
 - ha $d_s > D$, akkor a vetület továbbra is $D_p = D$ dimenziós marad,
 - ha $d_s < D$, akkor a fraktál kitölti az alteret és $D_p = d_s$.
- Ha vesszük egy D_A és egy D_B dimenziójú fraktál unióját ahol $D_A > D_B$, akkor az eredmény $D_{A \cup B} = D_A$ dimenziós lesz.
- Ha vesszük D_A és egy D_B dimenziójú fraktál metszetét, akkor az eredmény $D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$ dimenziós lesz:
 - egy L lineáris mérettel rendelkező tartományon belül:
 - A részecskék sűrűsége $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d}$,
 - B részecskék sűrűsége $\sim \frac{L^{D_B}}{L^d}$.
 - Mivel A és B független,
 - $A \cap B$ részecskék sűrűsége az $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$,
 - azaz $N_{A \cap B}(L) \sim \frac{L^{D_A} L^{D_B}}{L^d} = L^{D_A + D_B - d}$.

Sztochasztikus fraktálok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Sok olyan jelenség van, ahol az önhasonlóság szigorú geometriai értelemben nem teljesül, csak sztochasztikusan.

Sztochasztikus fraktálok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Sok olyan jelenség van, ahol az önhasonlóság szigorú geometriai értelemben nem teljesül, csak sztochasztikusan.
- PI. fázisátalakulás kritikus pontjánál a doménszerkezet.

Sztochasztikus fraktálok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Sok olyan jelenség van, ahol az önhasonlóság szigorú geometriai értelemben nem teljesül, csak sztochasztikusan.
- PI. fázisátalakulás kritikus pontjánál a doménszerkezet.
- Ilyenkor a sűrűség–sűrűség korrelációs függvény segítségével vizsgáljuk az önhasonlóságot:

$$C(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}).$$

Sztoczasztikus fraktálok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenszió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztoczasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenszió
mérése

- Sok olyan jelenség van, ahol az önhasonlóság szigorú geometriai értelemben nem teljesül, csak sztoczasztikusan.
- PI. fázisátalakulás kritikus pontjánál a doménszerkezet.
- Ilyenkor a sűrűség–sűrűség korrelációs függvény segítségével vizsgáljuk az önhasonlóságot:

$$C(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}).$$

- Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $C(\vec{r})$ izotrop, emiatt áttérünk $C(\vec{r}) \rightarrow C(r)$ -re.

Sztochasztikus fraktálok

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Sok olyan jelenség van, ahol az önhasonlóság szigorú geometriai értelemben nem teljesül, csak sztochasztikusan.
- Pl. fázisátalakulás kritikus pontjánál a doménszerkezet.
- Ilyenkor a sűrűség–sűrűség korrelációs függvény segítségével vizsgáljuk az önhasonlóságot:

$$C(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}).$$

- Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $C(\vec{r})$ izotrop, emiatt áttérünk $C(\vec{r}) \rightarrow C(r)$ -re.
- A vizsgált alakzat önhasonló ha $C(r)$ **SKÁLÁZÓ**, azaz ha

$$C(br) = g(b) \cdot C(r), \quad \leftrightarrow \quad C(r) \sim r^{-\alpha}.$$

Sztochasztikus fraktálok

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- **Hogy lehet egy sztochasztikus fraktál esetén a fraktáldimenziót meghatározni?**

→ Egy részecskétől számított L sugarú tartományon belül a részecskék számát a $C(r)$ alapján tudjuk becsülni:

$$N(L) \sim \int_0^L C(r) d^d r \sim L^{d-\alpha},$$

ami alapján $D = d - \alpha$.

Sztochasztikus fraktálok

Fraktáldimenzió

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Hogy lehet egy sztochasztikus fraktál esetén a fraktáldimenziót meghatározni?
- Egy részecskétől számított L sugarú tartományon belül a részecskék számát a $C(r)$ alapján tudjuk becsülni:

$$N(L) \sim \int_0^L C(r) d^d r \sim L^{d-\alpha},$$

ami alapján $D = d - \alpha$.

Anizotrop önhasonlóság

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia

Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- A természetben előfordulnak olyan alakzatok is, melyeknél a tér különböző irányokban eltérő módon kell skálázni ahhoz, hogy „önmagába” menjen át.

Anizotrop önhasonlóság

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfoglat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- A természetben előfordulnak olyan alakzatok is, melyeknél a tér különböző irányában eltérő módon kell skálázni ahhoz, hogy „önmagába” menjen át.
- Példa: Brown-mozgásnál az origótól való távolság, $x(t)$

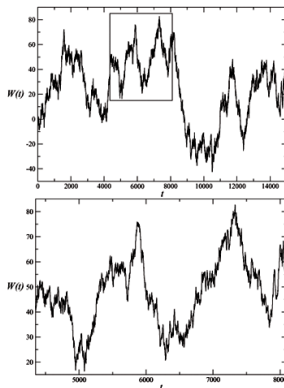


Figure 7. Self-similarity of a Brownian motion path. In (a) we plot a path of a Brownian motion with 15000 time steps. The curve in (b) is a blow-up of the region delimited by a rectangle in (a), where we have rescaled the x axis by a factor 4 and the y axis by a factor 2. Note that the graphs in (a) and (b) “look the same,” statistically speaking. This process can be repeated indefinitely.

Anizotrop önhasonlóság

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogal,
felület, hossz.
Fraktáldimensió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

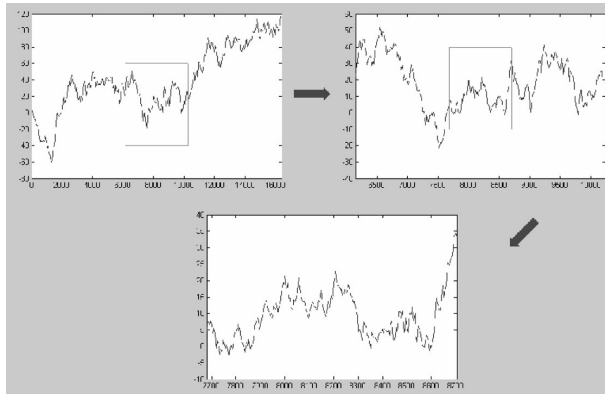
Önaffin fraktálok

Anizotropia

Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimensió mérése

- A természetben előfordulnak olyan alakzatok is, melyeknél a tér különböző irányában eltérő módon kell skálázni ahhoz, hogy „önmagába” menjen át.
- Példa: Brown-mozgásnál az origótól való távolság, $x(t)$



Anizotrop önhasonlóság

További példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

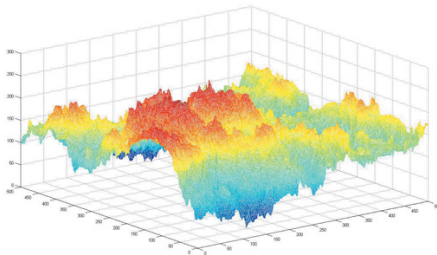
Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

Felület durvulás:



Anizotrop önhasonlóság

További példák

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

Tőzsdei árfolyam:

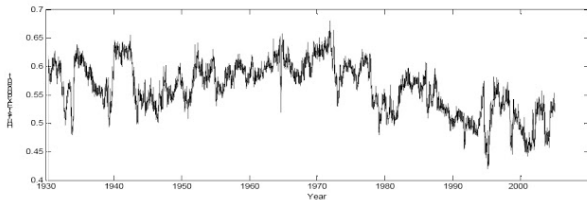


Figure 2.3. Hurst exponent for Dow-Jones daily return from 1/2/1930 to 5/14/2004

Source: HURST EXPONENT AND FINANCIAL MARKET PREDICTABILITY, Bo Qian and Khaled Rasheed

Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimensió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimensió mérése

Önaffin függvény

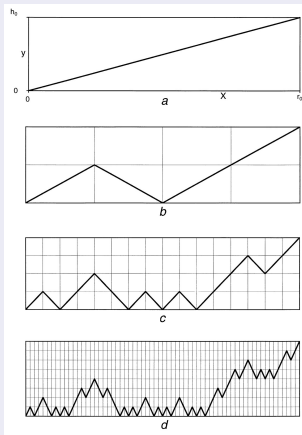
- A $[0, 1]$ -en értelmezett egyértékű, sehol sem differenciálható $F(x)$ függvény önaffin, ha

$$F(x) \simeq b^{-H} F(bx),$$

ahol $H > 0$.

- Ez azt jelenti, hogy akkor lesz a függvény invariáns, ha
- vízszintes tengely skálája $\cdot 1/b$,
 - a függ. tengely skálája $\cdot 1/b^H$.
- Megfordítva: ha vízszintesen b_x , függőlegesen b_y faktoriall kell nyújtani/zsugorítani, akkor

$$b_y = b_x^H, \quad H = \frac{\ln b_y}{\ln b_x}.$$



Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimensió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimensió mérése

Önaffin függvény

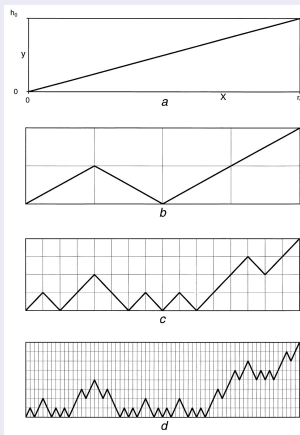
- A $[0, 1]$ -en értelmezett egyértékű, sehol sem differenciálható $F(x)$ függvény önaffin, ha

$$F(x) \simeq b^{-H} F(bx),$$

ahol $H > 0$.

- Ez azt jelenti, hogy akkor lesz a függvény invariáns, ha
 - vízszintes tengely skálája $\cdot 1/b$,
 - a függ. tengely skálája $\cdot 1/b^H$.
- Megfordítva: ha vízszintesen b_x , függőlegesen b_y faktoriall kell nyújtani/zsugorítani, akkor

$$b_y = b_x^H, \quad H = \frac{\ln b_y}{\ln b_x}.$$



Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenszió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenszió mérése

Önaffin függvény

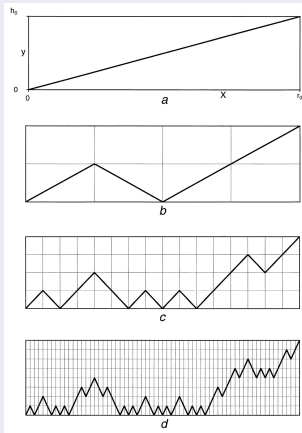
- A $[0, 1]$ -en értelmezett egyértékű, sehol sem differenciálható $F(x)$ függvény önaffin, ha

$$F(x) \simeq b^{-H} F(bx),$$

ahol $H > 0$.

- Ez azt jelenti, hogy akkor lesz a függvény invariáns, ha
 - vízszintes tengely skálája $\cdot 1/b$,
 - a függ. tengely skálája $\cdot 1/b^H$.
- Megfordítva: ha vízszintesen b_x , függőlegesen b_y faktoriall kell nyújtani/zsugorítani, akkor

$$b_y = b_x^H, \quad H = \frac{\ln b_y}{\ln b_x}.$$



Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Természetesen a természetben előforduló példáknál csak **sztochasztikusan** igaz az anizotrop önhasonlóság.

→ A korrelációs függvényen alapuló definíciója az önaffin struktúráknak:

$$C(\Delta x) = \left\langle (F(x + \Delta x) - F(x))^2 \right\rangle \sim \Delta x^{2H},$$

ahol $F(x)$ az adott felület magassága, (a függvény értéke).

- Belátható, hogy ez az előzővel ekvivalens definíciót ad.

Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Természetesen a természetben előforduló példáknál csak **sztochasztikusan** igaz az anizotrop önhasonlóság.

→ A korrelációs függvényen alapuló definíciója az önaffin struktúráknak:

$$C(\Delta x) = \langle (F(x + \Delta x) - F(x))^2 \rangle \sim \Delta x^{2H},$$

ahol $F(x)$ az adott felület magassága, (a függvény értéke).

- Belátható, hogy ez az előzővel ekvivalens definíciót ad.

Önaffin függvény

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió
mérése

- Természetesen a természetben előforduló példáknál csak **sztochasztikusan** igaz az anizotrop önhasonlóság.

→ A korrelációs függvényen alapuló definíciója az önaffin struktúráknak:

$$C(\Delta x) = \langle (F(x + \Delta x) - F(x))^2 \rangle \sim \Delta x^{2H},$$

ahol $F(x)$ az adott felület magassága, (a függvény értéke).

- Belátható, hogy ez az előzővel ekvivalens definíciót ad.

A felület durvasága és H

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

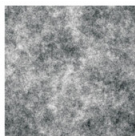
Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

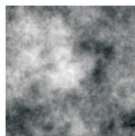
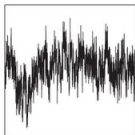
Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

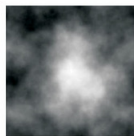
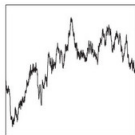
A fraktáldimenzió mérése



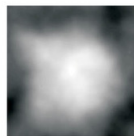
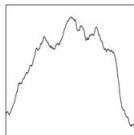
$H=0$



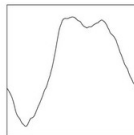
$H=0.5$



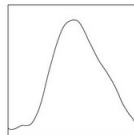
$H=1$



$H=1.5$



$H=2$



A felület durvasága és H

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

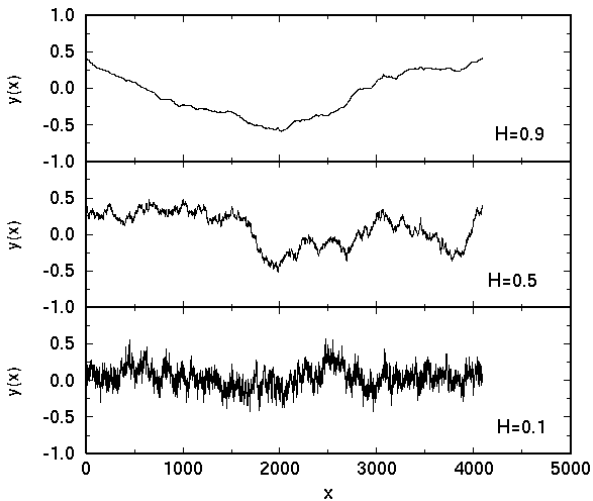
Dimenziók közti összefüggések

Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A H exponens

A fraktáldimenzió mérése



A felület durvasága és H

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térogat,
felület, hossz.

Fraktáldimensió

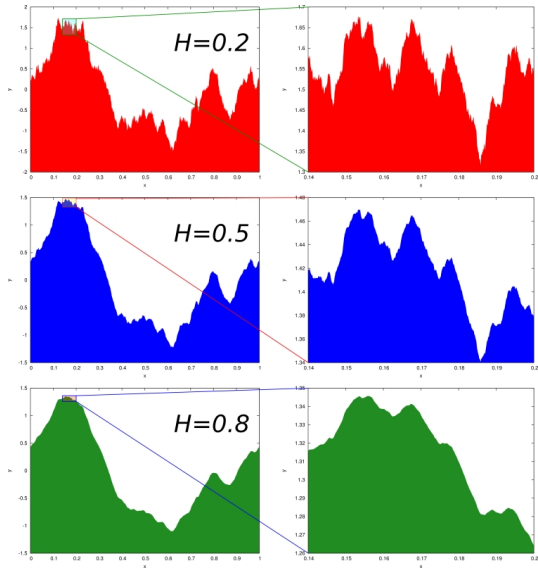
Dimenziók közti
összefüggések

Sztochasztikus
fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
 A H exponens

A fraktáldimensió
mérése



Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőleges kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőleges kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban

kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.

- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak lokális fraktáldimenzió, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak **lokális fraktáldimenzió**, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

Önaffin struktúra fraktáldimenziója

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt

Hogyan rajzoljunk fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat, felület, hossz.

Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

Sztochasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia

Önaffin függvény

A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Mekkora a fraktáldimenzió, ha vízszintesen b_x -el, függőlegesen b_y -nal kell skálázni, ahol $b_y = b_x^H$ és $H = \frac{\ln(b_y)}{\ln(b_x)}$?

→ Tegyük fel, hogy a k -adik iterációnál a dobozméret $b = b_x^{-k}$.

- ekkor vízszintesen pont b_x^k darab doboz fér el.
- a függvény által elfoglalt sáv függőlegesen kiterjedése egy b_x^{-k} vízszintes méretű tartományon kb. b_y^{-k} , azaz egy oszlopban kb. $\frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}}$ darab doboz kell a lefedéshez.
- emiatt összesen kb. $b_x^k \cdot \frac{b_y^{-k}}{b_x^{-k}} = \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k$ doboz kell a lefedéshez:

$$N(b) \sim \left(\frac{b_x^2}{b_y}\right)^k = b_x^{2k} \cdot b_y^{-k} = b_x^{2k} \cdot (b_x^H)^{-k} = (b_x^k)^{2-H} = b^{H-2}.$$

- Ezek alapján a fraktáldimenzió $D = 2 - H$.
- VIGYÁZAT! Ez csak **lokális fraktáldimenzió**, az önaffin függvények, felületek globálisan „laposak” és nem fraktálok.

A fraktáldimenzió és H mérése

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

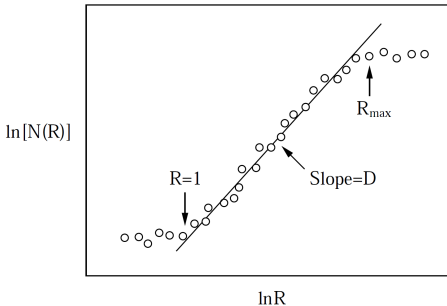
Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotrópia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Fraktáldimenzió, D : általában egy R sugarú gömbön belül található részecskék $N(R)$ számát szokás vizsgálni, ahol $N(R) \sim R^D$.



- H -exponens: egy ℓ hosszúságú szakaszon az $F(x)$ szórása

$$\sigma(\ell) = \left[\langle F(x)^2 \rangle_x - \langle F(x) \rangle_x^2 \right]^{1/2} \sim \ell^H.$$

A fraktáldimenzió és H mérése

Fraktálok

Példák

Fraktálok mindenütt
Hogyan rajzoljunk
fraktált?

Definíciók

Anomális térfogat,
felület, hossz.
Fraktáldimenzió

Dimenziók közti összefüggések

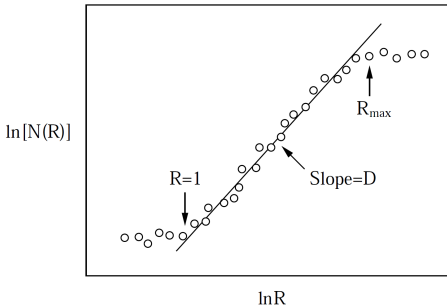
Sztocasztikus fraktálok

Önaffin fraktálok

Anizotropia
Önaffin függvény
A H exponens

A fraktáldimenzió mérése

- Fraktáldimenzió, D : általában egy R sugarú gömbön belül található részecskék $N(R)$ számát szokás vizsgálni, ahol $N(R) \sim R^D$.



- H -exponens: egy ℓ hosszúságú szakaszon az $F(x)$ szórása

$$\sigma(\ell) = \left[\langle F(x)^2 \rangle_x - \langle F(x) \rangle_x^2 \right]^{1/2} \sim \ell^H.$$

Önszervezően kritikus rendszerek: Példák és modellek

Bevezetés

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mi a **fázisátalakulás**?

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mi a **fázisátalakulás**?

A **statisztikus fizikában** (termodinamikában):

Az anyag átalakulása két különböző homogén állapot között,
amelynek során gyakran az anyag hőt ad le vagy vesz fel.

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mi a **fázisátalakulás**?

A **statisztikus fizikában** (termodinamikában):

Az anyag átalakulása két különböző homogén állapota között, amelynek során gyakran az anyag hőt ad le vagy vesz fel.

Példák:

- a kámfor a szekrényben szublimál
- az ősrobbanás utáni feltételezett kvark-gluon plazma megszűnt

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Mi a **fázisátalakulás**?

A **statisztikus fizikában** (termodinamikában):

Az anyag átalakulása két különböző homogén állapota között, amelynek során gyakran az anyag hőt ad le vagy vesz fel.

Példák:

- a kámfor a szekrényben szublimál
- az ősrobbanás utáni feltételezett kvark-gluon plazma megszűnt

Tágabb értelemben (statisztikus fizika módszertanával):

A rendszer átalakulása két eltérő rendezettségű állapota között.

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Mi a **fázisátalakulás**?

A **statisztikus fizikában** (termodinamikában):

Az anyag átalakulása két különböző homogén állapota között, amelynek során gyakran az anyag hőt ad le vagy vesz fel.

Példák:

- a kámfor a szekrényben szublimál
- az ősrobbanás utáni feltételezett kvark-gluon plazma megszűnt

Tágabb értelemben (statisztikus fizika módszertanával):

A rendszer átalakulása két eltérő rendezettségű állapota között.

Példák:

- emberek kapcsolati hálózatának szerkezete láncból csillag
- élőlények mozgása rendezetlen (össze-vissza) mozgásból átalakul egy nagy közös forgássá
- fehérjék kapcsolati hálózata sok kis modulból egy nagy modullá alakul

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

A rendszer egy tulajdonsága, amely gyakran kívülről szabályozható, és a rendszert két állapota között mozgatni tudja.

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

A rendszer egy tulajdonsága, amely gyakran kívülről szabályozható, és a rendszert két állapota között mozgatni tudja.

Példák:

- páratartalom miatt a homokszemcsék tapadási erőssége
- mozgó részecskék által tartani kívánt állandó sebesség

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

A rendszer egy tulajdonsága, amely gyakran kívülről szabályozható, és a rendszert két állapota között mozgatni tudja.

Példák:

- páratartalom miatt a homokszemcsék tapadási erőssége
- mozgó részecskék által tartani kívánt állandó sebesség

Mi a **rendparaméter**?

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

A rendszer egy tulajdonsága, amely gyakran kívülről szabályozható, és a rendszert két állapota között mozgatni tudja.

Példák:

- páratartalom miatt a homokszemcsék tapadási erőssége
- mozgó részecskék által tartani kívánt állandó sebesség

Mi a **rendparaméter**?

A fázisátalakulás során a rendszer rendezettségét mérő szám, általában úgy definiáljuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumban legyen.

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mi a **kontrollparaméter**?

A rendszer egy tulajdonsága, amely gyakran kívülről szabályozható, és a rendszert két állapota között mozgatni tudja.

Példák:

- páratartalom miatt a homokszemcsék tapadási erőssége
- mozgó részecskék által tartani kívánt állandó sebesség

Mi a **rendparaméter**?

A fázisátalakulás során a rendszer rendezettségét mérő szám, általában úgy definiáljuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumban legyen.

Példák:

- egy pohárban a víz mekkora része fagyott meg
- összes fehérje mekkora része vált rendezetlenből globulárisá
- összes DNS mekkora része lett rendezetlenből kettős spirál
- mozgó részecskék momentum-összege a max. mekkora része

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mitől kritikus a **kritikus** pont?

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mitől kritikus a **kritikus pont**?

A kontrollparaméter kis változása a rendparaméter nagy változását okozhatja.

Alapfogalmak ismétlése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mitől kritikus a **kritikus pont**?

A kontrollparaméter kis változása a rendparaméter nagy változását okozhatja.

Példa:

(lassú, kvázisztatikus) kis hőmérsékletváltozásra a vízből jég lesz.

Alapfogalmak ismételése

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Mitől kritikus a **kritikus pont**?

A kontrollparaméter kis változása a rendparaméter nagy változását okozhatja.

Példa:

(lassú, kvázisztatikus) kis hőmérsékletváltozásra a vízből jég lesz.

Általánosabban:

- a rendszer kis változás esetén a normál (Gauss) eloszláshoz képest jóval gyakrabban ad nagy válaszokat
- a válaszok nagyságának eloszlása hatványfüggvény

Mi az önszerveződés (self-organization)?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Definíció. Egy átalakulás során rövid hatótávolságú kölcsönhatások hosszútávú rendezettséget hoznak létre külső szabályozás nélkül:
ön + szerveződés

Mi az önszerveződés (self-organization)?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Definíció. Egy átalakulás során rövid hatótávolságú kölcsönhatások hosszútávú rendezettséget hoznak létre külső szabályozás nélkül:
ön + szerveződés

Elnevezések fizikai jelenségek alapján:

- a rövid hatótávolság: mikroszkopikus (lokális, helyi)
- a hosszútávú rend: makroszkopikus (globális, large-scale)

Mi az önszerveződés (self-organization)?

Definíció. Egy átalakulás során rövid hatótávolságú kölcsönhatások hosszútávú rendezettséget hoznak létre külső szabályozás nélkül:
ön + szerveződés

Elnevezések fizikai jelenségek alapján:

- a rövid hatótávolság: mikroszkopikus (lokális, helyi)
- a hosszútávú rend: makroszkopikus (globális, large-scale)

Az átalakulást „mozgatja” a kontrollparaméter, például a rendszer hőmérséklete, ami a két fő hatás relatív erősségét módosítja:

- fluktuációk – rendezetlen felé viszik a rendszert
- kölcsönhatások – rendezett felé viszik a rendszert

Mi az önszerveződés (self-organization)?

Definíció. Egy átalakulás során rövid hatótávolságú kölcsönhatások hosszútávú rendezettséget hoznak létre külső szabályozás nélkül:
ön + szerveződés

Elnevezések fizikai jelenségek alapján:

- a rövid hatótávolság: mikroszkopikus (lokális, helyi)
- a hosszútávú rend: makroszkopikus (globális, large-scale)

Az átalakulást „mozgatja” a kontrollparaméter, például a rendszer hőmérséklete, ami a két fő hatás relatív erősségét módosítja:

- fluktuációk – rendezetlen felé viszik a rendszert
- kölcsönhatások – rendezett felé viszik a rendszert

A rendeződés gyakran úgy történik, hogy a (termikus) fluktuációkat a lokális kölcsönhatás pozitív visszacsatolással erősíti:

- a fluktuációk véletlenszerűek, csökkentik a korrelációkat
- amikor a lokális kölcsönhatás erősít egy fluktuációt, akkor a korrelációkat növeli

Biológiai példák az önszerveződésre

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés



(Wikipédia)

Biológiai példák az önszerveződésre

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés



(Wikipédia)

Az önszerveződés „állatorvosi ló” példája

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

A SOC egyik legegyszerűbb példája:

Az önszerveződés „állatorvosi ló” példája

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

A SOC egyik legegyszerűbb példája:

- felülről egyenletesen táplált homokdomb
- kialakul egy nagyjából állandó dőlésszög
- időnként lavinák jelennek meg,
amelyeknek a méret eloszlása hatványfüggvény

Az önszerveződés „állatorvosi ló” példája

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

A SOC egyik legegyszerűbb példája:

- felülről egyenletesen táplált homokdomb
- kialakul egy nagyjából állandó dőlésszög
- időnként lavinák jelennek meg, amelyeknek a méret eloszlása hatványfüggvény



Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Egyensúlyi (konzervatív, zárt) rendszereket a kontrollparaméterrel (pl. hőmérséklet) történő külső vezérléssel lehet bevinni a kritikus pontba.

Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Egyensúlyi (konzervatív, zárt) rendszereket a kontrollparaméterrel (pl. hőmérséklet) történő külső vezérléssel lehet bevinni a kritikus pontba.

Példa: Heisenberg ferromágnes (klasszikus Heisenberg modell):

- rács (1d, 2d vagy 3d) pontjaiban 3d egységvektorok, \vec{s}_i
- kölcsönhatás csak szomszédok között: $\mathcal{H} = -\frac{1}{kT} \sum_{i,j} \vec{s}_i \vec{s}_j$

Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Egyensúlyi (konzervatív, zárt) rendszereket a kontrollparaméterrel (pl. hőmérséklet) történő külső vezérléssel lehet bevinni a kritikus pontba.

Példa: Heisenberg ferromágnes (klasszikus Heisenberg modell):

- rács (1d, 2d vagy 3d) pontjaiban 3d egységvektorok, \vec{s}_i
- kölcsönhatás csak szomszédok között: $\mathcal{H} = -\frac{1}{kT} \sum_{i,j} \vec{s}_i \vec{s}_j$

Melyik irányba fognak rendeződni ezek az egységvektorok?

- a rendeződés előtt minden irány azonos: **szimmetria**
- a közös irány **önszervezően** (külső vezérlés nélkül) áll be
- a rendeződés egy irányt kitüntet: **spontán szimmetriasértés**

Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Nemegyensúlyi (nem konzervatív, nyílt) rendszerekben előfordul, hogy a dinamika a kritikus állapotba viszi a rendszert.

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Nemegyensúlyi (nem konzervatív, nyílt) rendszerekben előfordul, hogy a dinamika a kritikus állapotba viszi a rendszert.

Az önszerveződött állapot **megjelenése** során megmaradási törvények (anyag, energia, lendület) sérülnek.

- példa: a homokdomb a felépülése során anyagot kap kívülről

Mitől önszervező?

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Nemegyensúlyi (nem konzervatív, nyílt) rendszerekben előfordul, hogy a dinamika a kritikus állapotba viszi a rendszert.

Az önszerveződött állapot **megjelenése** során megmaradási törvények (anyag, energia, lendület) sérülnek.

- példa: a homokdomb a felépülése során anyagot kap kívülről

Az önszerveződés **eredménye** szintén nemegyensúlyi állapot, de már stacionárius:

- az egyensúllyal ellentétben nincsen teljes kiegyenlítődség, és mindig vannak áramok (anyag, energia, stb)
- stacionárius, mert hosszú idő átlagában a rendszerbe bejövő és a rendszerből kimenő energia, lendület, stb. egyenlő

Self-organized criticality (SOC)

Önszervező kritikusság

Self-Organized Criticality (SOC)

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Az önszerveződés hogyan viszi a rendszert a kritikus állapotba?

Self-Organized Criticality (SOC)

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Az önszerveződés hogyan viszi a rendszert a kritikus állapotba?

Ismétlés: Mi a kritikus viselkedés? A **kritikus pontnál**

Self-Organized Criticality (SOC)

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Az önszerveződés hogyan viszi a rendszert a kritikus állapotba?

Ismétlés: Mi a kritikus viselkedés? A **kritikus pontnál**

- nagy fluktuációk és
- hatványfüggvény szerinti eloszlások jelennek meg.

Self-Organized Criticality (SOC)

Az önszerveződés hogyan viszi a rendszert a kritikus állapotba?

Ismétlés: Mi a kritikus viselkedés? A **kritikus pontnál**

- nagy fluktuációk és
- hatványfüggvény szerinti eloszlások jelennek meg.

Az SOC nemegyensúlyi jelenség:

- A kritikus viselkedés eredeti definíciója egyensúlyi állapotra vonatkozik, amit egy lassú (kvázisztatikus) fázisátalakulás során látunk.
- A SOC esetében egy stacionárius nemegyensúlyi állapothoz konvergál a rendszer (folyamatosan kap például energiát vagy anyagot a környezetéből).

Self-Organized Criticality (SOC)

Az önszerveződés hogyan viszi a rendszert a kritikus állapotba?

Ismétlés: Mi a kritikus viselkedés? A **kritikus pontnál**

- nagy fluktuációk és
- hatványfüggvény szerinti eloszlások jelennek meg.

Az SOC nemegyensúlyi jelenség:

- A kritikus viselkedés eredeti definíciója egyensúlyi állapotra vonatkozik, amit egy lassú (kvázisztatikus) fázisátalakulás során látunk.
- A SOC esetében egy stacionárius nemegyensúlyi állapothoz konvergál a rendszer (folyamatosan kap például energiát vagy anyagot a környezetéből).
- Ha egy SOC-t mutató rendszer időben egyenletesen kapja az energiát/anyagot,
- akkor is a válaszainak (amikkel mindig visszatér a stacionárius állapothoz) a méret eloszlása **hatványfüggvény**.

Homokdomb: Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Homokdomb (rizsszemekkel működik jól)

Videó (2m57s–3m50s): <https://youtu.be/KnOkkC4QND8#t=2m57s>

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

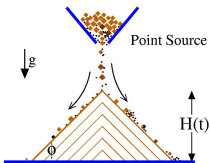
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Homokdomb (rizsszemekkel működik jól)

Videó (2m57s–3m50s): <https://youtu.be/KnOkkC4QND8#t=2m57s>



(<http://www-ics.u-strasbg.fr/etsp>)



(Hesse és Gross 2014, doi: 10.3389/fnsys.2014.00166)

Homokdomb: Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

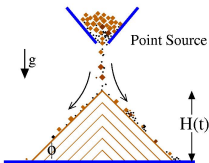
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Homokdomb (rizsszemekkel működik jól)

Videó (2m57s–3m50s): <https://youtu.be/KnOkkC4QND8#t=2m57s>



(<http://www-ics.u-strasbg.fr/etsp>)



(Hesse és Gross 2014, doi: 10.3389/fnsys.2014.00166)

Megfigyelés: bárhogyan szórjuk a homokot a domb tetejére, a lejtő meredeksége (θ) növekszik, és egy (a szórás módjától független) θ_C érték fölé érve visszaáll θ_C alatti értékre.

Homokdomb: Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

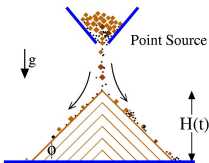
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Homokdomb (rizsszemekkel működik jól)

Videó (2m57s–3m50s): <https://youtu.be/KnOkkC4QND8#t=2m57s>



(<http://www-ics.u-strasbg.fr/etsp>)



Addition of
sand grains:
slope increases

→ Critical slope ←

Avalanche
occurrence:
slope decreases

(Hesse és Gross 2014, doi: 10.3389/fnsys.2014.00166)

Megfigyelés: bárhogyan szórjuk a homokot a domb tetejére, a lejtő meredeksége (θ) növekszik, és egy (a szórás módjától független) θ_c érték fölé érve visszaáll θ_c alatti értékre.

A stacionárius állapotot (meredekséget) fenntartó lavinák méret eloszlása hatványfüggvény. Ezért ez egy kritikus állapot, és a θ_c neve kritikus szög.

Homokdomb: Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

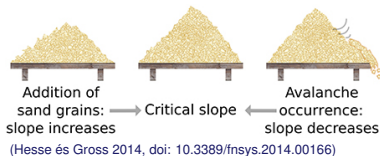
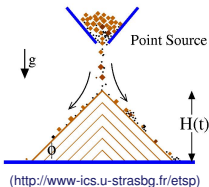
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Homokdomb (rizsszemekkel működik jól)

Videó (2m57s–3m50s): <https://youtu.be/KnOkkC4QND8#t=2m57s>



Megfigyelés: bárhogy szórjuk a homokot a domb tetejére, a lejtő meredeksége (θ) növekszik, és egy (a szórás módjától független) θ_c érték fölé érve visszaáll θ_c alatti értékre.

A stacionárius állapotot (meredekséget) fenntartó lavinák méret eloszlása hatványfüggvény. Ezért ez egy kritikus állapot, és a θ_c neve kritikus szög.

Megjegyzés: a kritikus szög közelében kis változás (néhány homokszem) nagy lavinát okozhat.

Homokdomb: 1-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Egy négyzetrács oszlopaiba felülről „homokszemek” érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: 1-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Egy négyzetrács oszlopaiba felülről „homokszemek” érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.

Modellezési módszer:

A felület magassága helyett csak a magasság deriváltját figyeljük.

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: 1-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Egy négyzetrács oszlopaiba felülről „homokszemek” érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.

Modellezési módszer:

A felület magassága helyett csak a magasság deriváltját figyeljük.

- Ha egy oszlop magassága 3, akkor a két felső mezője átkerül a két szomszédos oszlopra.
- Folytatni mindenütt, ahol keletkezett 3-as magasság.
- Ha egy oszlop a minta szélén van, akkor az egyik „homokszeme” leesik a minta széléről.

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: 1-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

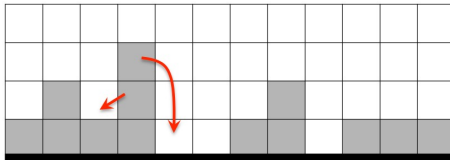
Önszervezően
kritikus
rendszerek

Egy négyzetrács oszlopaiba felülről „homokszemek” érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.

Modellezési módszer:

A felület magassága helyett csak a magasság deriváltját figyeljük.

- Ha egy oszlop magassága 3, akkor a két felső mezője átkerül a két szomszédos oszlopra.
- Folytatni mindenütt, ahol keletkezett 3-as magasság.
- Ha egy oszlop a minta szélén van, akkor az egyik „homokszeme” leesik a minta széléről.



Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: 1-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

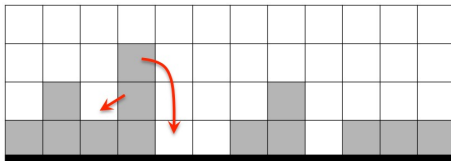
Önszervezően
kritikus
rendszerek

Egy négyzetrács oszlopaiba felülről „homokszemek” érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.

Modellezési módszer:

A felület magassága helyett csak a magasság deriváltját figyeljük.

- Ha egy oszlop magassága 3, akkor a két felső mezője átkerül a két szomszédos oszlopra.
- Folytatni mindenütt, ahol keletkezett 3-as magasság.
- Ha egy oszlop a minta szélén van, akkor az egyik „homokszeme” leesik a minta széléről.



Egy új „homokszem” okozhat több egymás utáni lépést → lavina.

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise.

Bak, Tang, Wiesenfeld. PRL 1987, doi: [10.1103/PhysRevLett.59.381](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381).

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció
Tudó működés

Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise.

Bak, Tang, Wiesenfeld. PRL 1987, doi: 10.1103/PhysRevLett.59.381.

Egyenletes és korrelálatlan érkezés:

- 2d rács oszlopaira pontok érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.
- az (x, y) helyen a függvény értéke $h(x, y)$ nem a homok magassága, inkább derivált

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció
Tudó működés

Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise.

Bak, Tang, Wiesenfeld. PRL 1987, doi: 10.1103/PhysRevLett.59.381.

Egyenletes és korrelálatlan érkezés:

- 2d rács oszlopaira pontok érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.
- az (x, y) helyen a függvény értéke $h(x, y)$ nem a homok magassága, inkább derivált

Kölcsönhatás: ha egy oszlop magassága $K \geq 4$, akkor

- oszlop négy felső eleme átkerül a szomszédos oszlopokra
- a minta szélén leesik

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Modell: Matematikai absztrakció a szemcsés anyag domb alapján

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció
Tudó működés

Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise.

Bak, Tang, Wiesenfeld. PRL 1987, doi: 10.1103/PhysRevLett.59.381.

Egyenletes és korrelálatlan érkezés:

- 2d rács oszlopaira pontok érkeznek egyesével, időben és térben korrelálatlanul.
- az (x, y) helyen a függvény értéke $h(x, y)$ nem a homok magassága, inkább derivált

Kölcsönhatás: ha egy oszlop magassága $K \geq 4$, akkor

- oszlop négy felső eleme átkerül a szomszédos oszlopokra
- a minta szélén leesik

Mit mérünk:

- egy oszlopra ráteszünk 1 elemet
- felrajzoljuk a keletkező lavina területét (felülnézetét)
- minden oszlopra csináljuk meg ezt a mérést
- az összes kapott lavinát (felülnézetét) klaszterezzük

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Eredmények

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

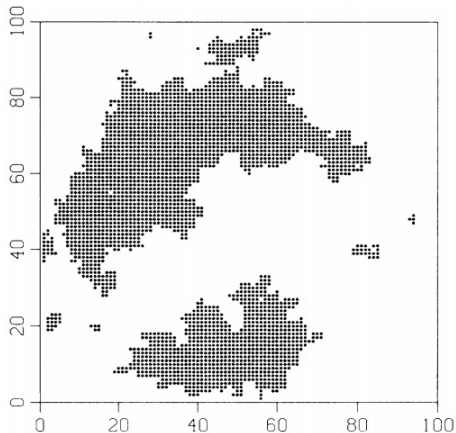
Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Pillanatfelvétel a klaszterekről, 100×100 -as terület (Bak et.al Fig.1)



(Bak Tang Wiesenfeld 1987)

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Eredmények

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Klaszter méret eloszlás (2d,3d)

Bak et.al. Fig.2

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Eredmények

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

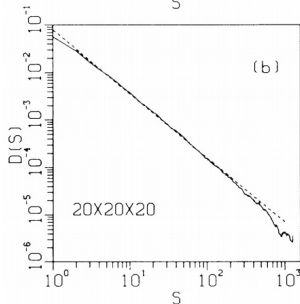
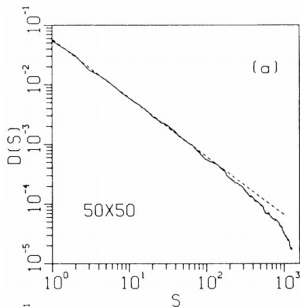
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Klaszter méret eloszlás (2d,3d)

Bak et.al. Fig.2



Homokdomb: 2-dimenziós modell

Eredmények

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

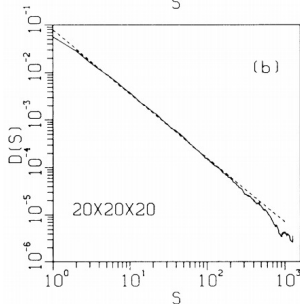
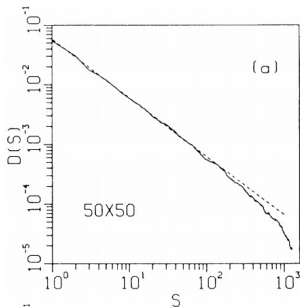
Biológiai evolúció

Tűdő működés

Klaszter méret eloszlás (2d,3d)

Bak et.al. Fig.2

Illesztett
egyenes
meredeksége:
0.98



Homokdomb: 2-dimenziós modell

Eredmények

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

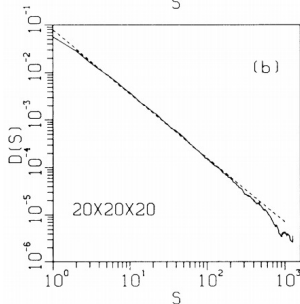
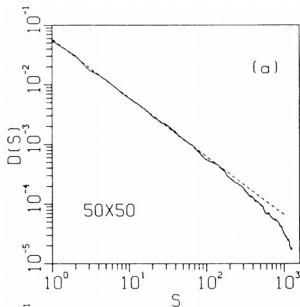
Tűdő működés

Klaszter méret
eloszlás (2d,3d)

Bak et.al. Fig.2

Illesztett
egyenes
meredeksége:
0.98

3d-ben: 1.35



Homokdomb: 2-dimenziós modell

Megjegyzések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

A gyakorlatban mit jelent a hatványfüggvény szerinti eloszlás?

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Megjegyzések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

A gyakorlatban mit jelent a hatványfüggvény szerinti eloszlás?

- Hatványfüggvény x^{-3} értéke $x = 10$ -nél 10^{-3} .
- Gauss e^{-x^2} értéke 4×10^{-44} .
Összehasonlítás: proton $10^{-15} m$, Univerzum $\geq 10^{27} m$.

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Hasonló helyzetek

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

SOC munkahelyi hasonlat (ügyintézők):

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Hasonló helyzetek

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

SOC munkahelyi hasonlat (ügyintézők):

- Ha egy alkalmazott a munkatársainál jóval több munkát kap,
- akkor továbbadja a környezetének a munkája egy részét.
- Az átlagosnál sokkal nagyobb „lavinák” gyakoriak.

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Hasonló helyzetek

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

SOC munkahelyi hasonlat (ügyintézők):

- Ha egy alkalmazott a munkatársainál jóval több munkát kap,
- akkor továbbadja a környezetének a munkája egy részét.
- Az átlagosnál sokkal nagyobb „lavinák” gyakoriak.

SOC társadalmi hasonlat:

Homokdomb: 2-dimenziós modell

Hasonló helyzetek

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

SOC munkahelyi hasonlat (ügyintézők):

- Ha egy alkalmazott a munkatársainál jóval több munkát kap,
- akkor továbbadja a környezetének a munkája egy részét.
- Az átlagosnál sokkal nagyobb „lavinák” gyakoriak.

SOC társadalmi hasonlat:

- Egyenletes környezeti változás és
- a helyi átlag feletti teher helyi átadása esetén
- a teljes rendszer szintjén az átlagosnál sokkal nagyobb változások váratlanul gyakoriak.

Biológiai evolúció SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Darwin: egymás utáni kis változások (mutációk) hatására

- a fajok változnak és
- fajok keletkeznek időben nagyjából egyenletes gyakorisággal (phyletic gradualism).

Biológiai evolúció SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Darwin: egymás utáni kis változások (mutációk) hatására

- a fajok változnak és
- fajok keletkeznek időben nagyjából egyenletes gyakorisággal (phyletic gradualism).

Darwin után megfigyelés:

- sokáig semmi nem történik
- időnként ugrásszerűen sok új faj

Biológiai evolúció SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Darwin: egymás utáni kis változások (mutációk) hatására

- a fajok változnak és
- fajok keletkeznek időben nagyjából egyenletes gyakorisággal (phyletic gradualism).

Darwin után megfigyelés:

- sokáig semmi nem történik
- időnként ugrásszerűen sok új faj

Eldredge és Gould (1972) javaslatai:

- fossziliáknál phyletic gradualism helyett nagy változásokat látnak
- **statis**: megjelent faj nem változik

Biológiai evolúció SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Darwin: egymás utáni kis változások (mutációk) hatására

- a fajok változnak és
- fajok keletkeznek időben nagyjából egyenletes gyakorisággal (phyletic gradualism).

Darwin után megfigyelés:

- sokáig semmi nem történik
- időnként ugrásszerűen sok új faj

Eldredge és Gould (1972) javaslatai:

- fossziliáknál phyletic gradualism helyett nagy változásokat látnak
- **statis:** megjelent faj nem változik

Modell a stasis közelítés alapján:
Punctuated Equilibrium
model of evolution.

Biológiai evolúció SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Darwin: egymás utáni kis változások (mutációk) hatására

- a fajok változnak és
- fajok keletkeznek időben nagyjából egyenletes gyakorisággal (phyletic gradualism).

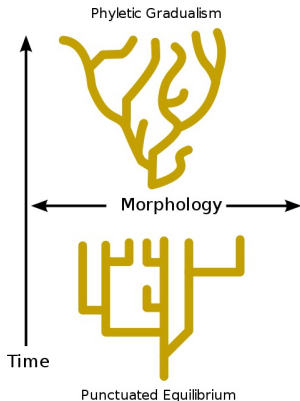
Darwin után megfigyelés:

- sokáig semmi nem történik
- időnként ugrásszerűen sok új faj

Eldredge és Gould (1972) javaslatai:

- fossziliáknál phyletic gradualism helyett nagy változásokat látnak
- **statis**: megjelent faj nem változik

Modell a stasis közelítés alapján:
Punctuated Equilibrium
model of evolution.



(Wikipédia)

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Megfigyelés: rendszertani nemzetségek „élettartam” eloszlása
hatványfüggvény

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Megfigyelés: rendszertani nemzetségek „élettartam” eloszlása
hatványfüggvény

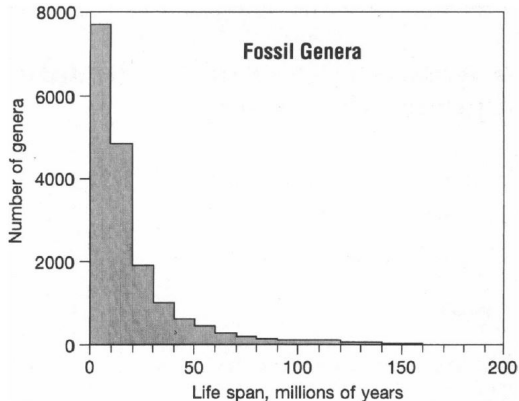


FIG. 7. Lifetime distribution for genera as recorded by Sepkoski, Raup, and Boyajian (2–6). The distribution can be well fitted by a power law $N(t) \propto 1/t^2$.

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Megfigyelés: faj (rend, osztály, stb) kihalások létszám eloszlása széles

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

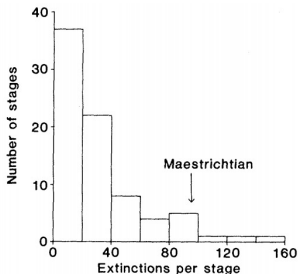
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Megfigyelés: faj (rend, osztály, stb) kihalások létszám eloszlása széles

Fig. 1. Distribution of extinction intensities for the 79 generally recognized geologic stages of Phanerozoic time, based on recorded times of extinction of 2316 marine animal families (7). Extinction intensity for the last stage of the Cretaceous (Maestrichtian) is indicated for comparison.



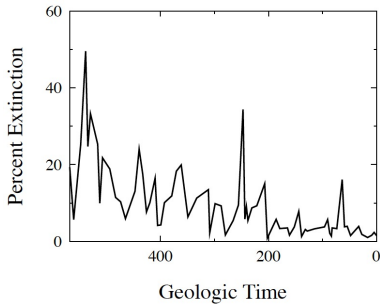
(Raup, Science 1986, doi: 10.1126/science.11542058)

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Megfigyelés: faj (rend, osztály, stb) kihalások létszám eloszlása széles



(D. Raup. Extinction: Bad Genes or Bad Luck? W. W. Norton & Company, 1992.)

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

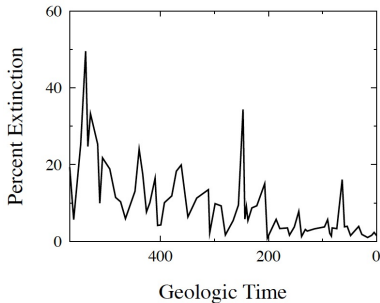
Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Megfigyelés: faj (rend, osztály, stb) kihalások létszám eloszlása széles



(D. Raup. Extinction: Bad Genes or Bad Luck? W. W. Norton & Company, 1992.)

Következtetések:

- a kihalások között vannak korrelációk („lavinák”)
- és az élővilág önszervező kritikus állapotban van

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bak, Sneppen. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. PRL 1993. doi 10.1103/PhysRevLett.71.4083

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Bak, Sneppen. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. PRL 1993. doi 10.1103/PhysRevLett.71.4083

Kezdeti állapot:

- 1d láncban N mező ($i = 1 \rightarrow N$) (ökoszisztéma), nyitott határ
- stasis közelítés: faj nem változik, csak kihalni tud
- fitnessz: relatív reprodukciós képesség
 $0 \leq B_i \leq 1$ egyenletes eloszlású független véletlen számok

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Bak, Sneppen. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. PRL 1993. doi 10.1103/PhysRevLett.71.4083

Kezdeti állapot:

- 1d láncban N mező ($i = 1 \rightarrow N$) (ökoszisztéma), nyitott határ
- stasis közelítés: faj nem változik, csak kihalni tud
- fitness: relatív reprodukciós képesség
 $0 \leq B_i \leq 1$ egyenletes eloszlású független véletlen számok

Frissítési szabályok:

1. a legkisebb fitness-ű mezőn kihalás, B_i cseréje, az új szám:
időben és térben korrelálatlan, 0 és 1 között egyenletes eloszlás
→ csak ezzel a szabállyal minden B_i 1-hez tartana lassan

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Bak, Sneppen. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. PRL 1993. doi 10.1103/PhysRevLett.71.4083

Kezdeti állapot:

- 1d láncban N mező ($i = 1 \rightarrow N$) (ökoszisztéma), nyitott határ
- stasis közelítés: faj nem változik, csak kihalni tud
- fitnessz: relatív reprodukciós képesség
 $0 \leq B_i \leq 1$ egyenletes eloszlású független véletlen számok

Frissítési szabályok:

1. a legkisebb fitnessz-ű mezőn kihalás, B_i cseréje, az új szám: időben és térben korrelálatlan, 0 és 1 között egyenletes eloszlás
→ csak ezzel a szabállyal minden B_i 1-hez tartana lassan
2. egy csere után a két szomszéd fitnesszét is cseréljük ugyanígy
→ ez a lépés a kölcsönhatás
→ emiatt **korrelációk** épülnek fel
a térbeli korrelációk okozzák a lavinákat

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Darwin-féle **phyletic gradualism**: nincsen kölcsönhatás

A nagy evolúciós változások (megjelenés, kihalás) magyarázata:

- sok, egymással időben és térben korrelált mutáció
- nagy külső változás (pl. vulkán kitörés, meteor becsapódása)

!! Mindegyiknek jóval kisebb az esélye,
mint a nagy evolúciós változások mért gyakorisága.

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Darwin-féle **phyletic gradualism**: nincsen kölcsönhatás

A nagy evolúciós változások (megjelenés, kihalás) magyarázata:

- sok, egymással időben és térben korrelált mutáció
- nagy külső változás (pl. vulkán kitörés, meteor becsapódása)

!! Mindegyiknek jóval kisebb az esélye,
mint a nagy evolúciós változások mért gyakorisága.

SOC modell (Bak-Sneppen):

- térben és időben **korrelálatlan mutáció**
(legkisebb fitness cseréje RND értékre)
- a **lokális kölcsönhatás** korrelációkat okoz, amelyek
 - hatványfüggvény szerinti méret eloszlásúak
 - a rendszer méretét elérhetik

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Darwin-féle **phyletic gradualism**: nincsen kölcsönhatás

A nagy evolúciós változások (megjelenés, kihalás) magyarázata:

- sok, egymással időben és térben korrelált mutáció
- nagy külső változás (pl. vulkán kitörés, meteor becsapódása)

!! Mindegyiknek jóval kisebb az esélye,
mint a nagy evolúciós változások mért gyakorisága.

SOC modell (Bak-Sneppen):

- térben és időben **korrelálatlan mutáció**
(legkisebb fitnessz cseréje RND értékre)
- a **lokális kölcsönhatás** korrelációkat okoz, amelyek
 - hatványfüggvény szerinti méret eloszlásúak
 - a rendszer méretét elérhetik

Nagy rendszer ($N \gg 1$), hosszú idejű szimuláció

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Ha a rendszer kezdeti állapotában minden $B_i < 1$, akkor felépül egy **önszervező kritikus állapot**, ami független a kezdeti állapottól, és stacionárius módon fennmarad.

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Ha a rendszer kezdeti állapotában minden $B_i < 1$, akkor felépül egy **önszervező kritikus állapot**, ami független a kezdeti állapottól, és stacionárius módon fennmarad.

Ebben a stacionárius állapotban

- a B_i fitness értékek eloszlása a $B_C \approx 0.67$ -nél kezdődik, fölötte konstans \rightarrow lépcsőszerű vonal a lenti ábra jobb oldalán
- a kicserélt (legkisebb) B_i fitness értékek eloszlása $B = 0$ -tól B_C -ig lineárisan csökken \rightarrow a lenti ábra bal oldali görbéje

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Ha a rendszer kezdeti állapotában minden $B_i < 1$, akkor felépül egy **önszervező kritikus állapot**, ami független a kezdeti állapottól, és stacionárius módon fennmarad.

Ebben a stacionárius állapotban

- a B_i fitness értékek eloszlása a $B_C \approx 0.67$ -nél kezdődik, fölötté konstans \rightarrow lépcsőszerű vonal a lenti ábra jobb oldalán
- a kicserélt (legkisebb) B_i fitness értékek eloszlása $B = 0$ -tól B_C -ig lineárisan csökken \rightarrow a lenti ábra bal oldali görbéje

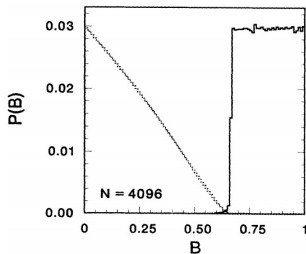


FIG. 2. Distribution of barriers in the critical state (right curve). There is a self-organized upper threshold $B_C = 0.67 \pm 0.01$ for spontaneous mutation. The distribution is flat above the threshold, with statistical fluctuations. The distribution of the minimum barriers is also shown (left curve); it vanishes (by definition) above the self-organized threshold.

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

→ **Térbeli korrelációk** épülnek fel:

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

→ **Térbeli korrelációk** épülnek fel:

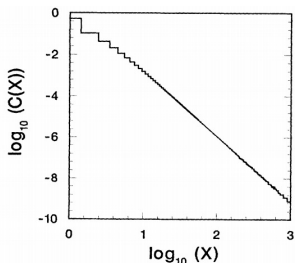


FIG. 1. Distribution of distances $C(x)$ between successive mutations. The power law indicates that the ecology has self-organized into a critical state.

(Bak Sneppen 1993 PRL)

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

→ **Térbeli korrelációk** épülnek fel:

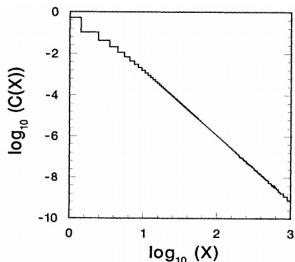


FIG. 1. Distribution of distances $C(x)$ between successive mutations. The power law indicates that the ecology has self-organized into a critical state.

(Bak Sneppen 1993 PRL)

→ Definíció:

A **lavina** egymás után kicserélt B_c alatti B_i értékek sorozata.

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

- a kezdeti állapotban a fitness értékek térben korrelálatlanok
- később az egymás utáni lépésekben a minimális fitness-ek egymáshoz közeli mezőkön lesznek

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

- a kezdeti állapotban a fitness értékek térben korrelálatlanok
- később az egymás utáni lépésekben a minimális fitness-ek egymáshoz közeli mezőkön lesznek

→ **Lavinák** jelennek meg:

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

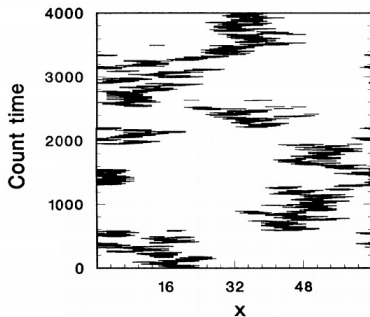
Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

- a kezdeti állapotban a fitness értékek térben korrelálatlanok
- később az egymás utáni lépésekben a minimális fitness-ek egymáshoz közeli mezőkön lesznek

→ **Lavinák** jelennek meg:



(Bak Sneppen 1993 PRL)

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

→ Hatványfüggvény eloszlású **lavina méretek**:

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

→ Hatványfüggvény eloszlású **lavina méretek:**

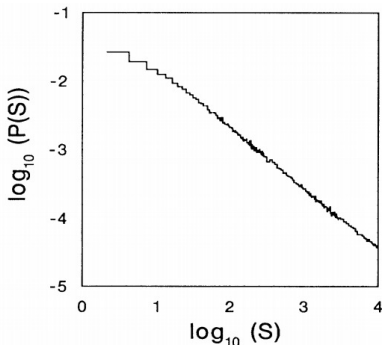


FIG. 5. Distribution of avalanche sizes in the critical state. Here an avalanche is defined by subsequent sequential activity below punctuation of the barrier $B = 0.65$.

(Bak Sneppen 1993 PRL)

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

A modell egy idő átskálázással (mutációk száma helyett valódi idő) a biológiai kihalási hullámok **méret eloszlását** helyesen adja:

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Eredmények a Bak-Sneppen modellben:

A modell egy idő átskálázással (mutációk száma helyett valódi idő) a biológiai kihalási hullámok **méret eloszlását** helyesen adja:

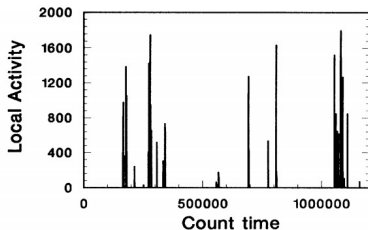


FIG. 4. Punctuated equilibrium behavior. Activity vs time in a local segment of ten consecutive sites is shown for a system of size $N = 512$. Time is measured in units of the number of mutations. In real time, the intermittency is further enhanced by the exponential enlargement of the periods of stasis.

(Bak Sneppen 1993 PRL)

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Összefoglalás – Eredmények a Bak-Sneppen modellben

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Összefoglalás – Eredmények a Bak-Sneppen modellben

A kezdeti állapottól függetlenül ugyanaz a nemtriviális stacionárius végállapot jelenik meg:

- $B_C \approx 0.67$ küszöb érték
- megfigyelhető a „punctuated equilibrium”, azaz: a B_C alatti B értékeket érintő lavinák méretének eloszlása egy $P(\geq s) \sim s^{-\tau}$ hatványfüggvény, ahol $\tau \approx 1.07$

Biológiai evolúció SOC modellje

Punctuated equilibrium model of evolution

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tudó működés

Összefoglalás – Eredmények a Bak-Sneppen modellben

A kezdeti állapottól függetlenül ugyanaz a nemtriviális stacionárius végállapot jelenik meg:

- $B_C \approx 0.67$ küszöb érték
- megfigyelhető a „punctuated equilibrium”, azaz: a B_C alatti B értékeket érintő lavinák méretének eloszlása egy $P(\geq s) \sim s^{-\tau}$ hatványfüggvény, ahol $\tau \approx 1.07$

A modell **átlagtér** változatában egy minimális B_i fitness cseréje után $K - 1$ másik **véletlenszerűen** kiválasztott hely frissül egyszerre. Tehát a csere után nem a szomszédok változnak. (Flyvbjerg, Sneppen, Bak. Mean field theory for a simple model of evolution. PRL 1993, doi 10.1103/PhysRevLett.71.4087.)

- Ez az átlagtér modell analitikusan megoldható,
- skálázást ad,
- de a korrelációk figyelmen kívül hagyása miatt B_C a korábbi 0.67-os értéktől eltérő.

Tüdő működés SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Tüdő szerkezete

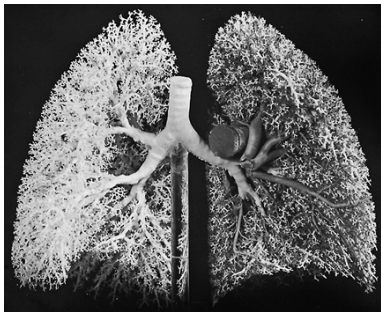
Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés



(Shields, Ponn, Rusch: General Thoracic Surgery, 2009)

Tüdő működés SOC modellje

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

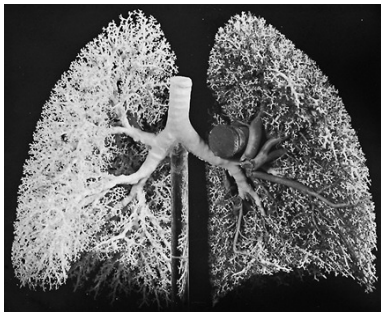
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő szerkezete

- 2-felé ágazik 35 lépésen át
- utolsó 10-14 lépésnél:
 - szelep van, ami
 - nyomásra nyit



(Shields, Ponn, Rusch: General Thoracic Surgery, 2009)

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Suki et.al.: Avalanches and power-law behaviour in lung inflation. Nature 1994, doi 10.1038/368615a0

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően kritikus rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Suki et.al.: Avalanches and power-law behaviour in lung inflation. Nature 1994, doi 10.1038/368615a0

- „leeresztett” tüdő felfújása teljes méretűre olyan légárammal, ami időegység alatt állandó V mennyiségű levegőt visz be ΔP nyomás különbség mellett
- mit mértek? az R légúti ellenállást (airway resistance)
- R definíciója elektromos analógiával ($R=U/I$):

$$R = \frac{\Delta P}{dV/dt}$$

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

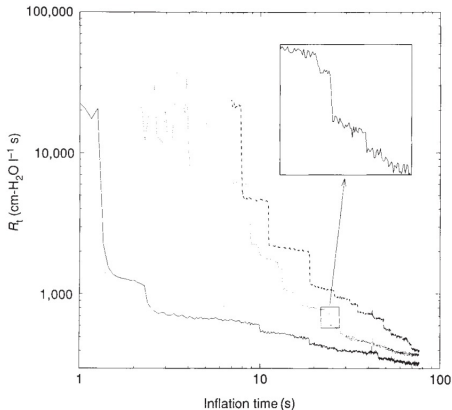


FIG. 1 a, The terminal airway resistance R_t as a function of inflation time for three different capsules on a single dog lung lobe. The

(Suki et al, Fig.1)

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

- önhasonló görbe
- ha egy szelep nyit,
utána több nyithat
→ lavina

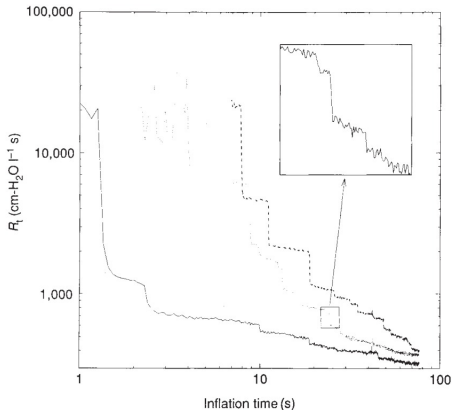


FIG. 1 a, The terminal airway resistance R_t as a function of inflation time for three different capsules on a single dog lung lobe. The

(Suki et al, Fig.1)

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Ellenállás relatív ugrásainak méret eloszlása hatványfüggvény

- input:
egyenletes „betáplálás”
- output:
nagy változások,
méret eloszlásuk
hatványfüggvény.

→ hasonló a
homokdombhoz !

Tüdő működés SOC modellje

Megfigyelések

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

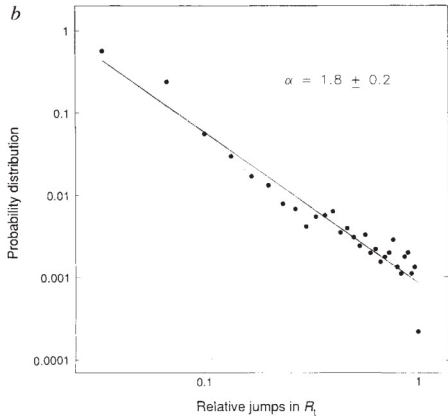
Működés mérése: levegő befújása kutya tüdőbe

Ellenállás relatív ugrásainak méret eloszlása hatványfüggvény

- input:
egyenletes „betáplálás”

- output:
nagy változások,
méret eloszlásuk
hatványfüggvény.

→ hasonló a
homokdombhoz !



(Suki et al, Fig.1b)

Tűdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192

Tüdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

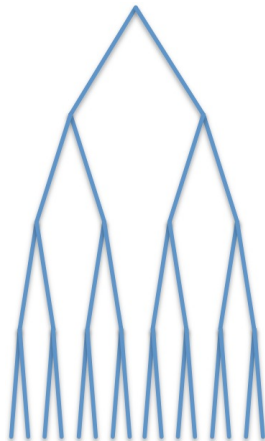
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

A tüdő szerkezete: 3-Cayley-fa harmada

- hurokmentes → egyszerűen számolható
- a gráf gyöker pontja a tüdő bejárata
- utána mindenütt elágazás 2 irányban



Tűdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192

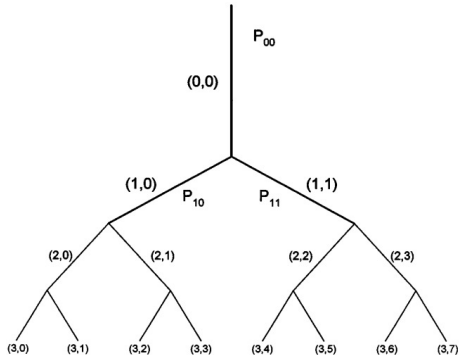
Tüdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192



Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

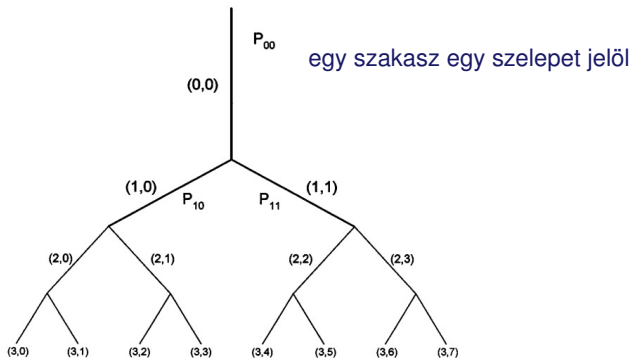
Tüdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192



Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tűdő működés SOC modellje

Modell

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

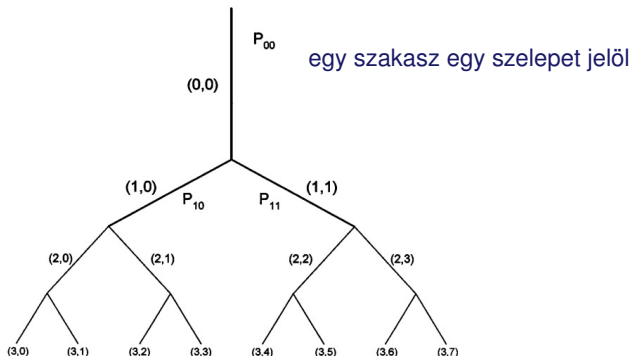
Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Modell: Szerkezet alapján lavinák méretének eloszlása

Barabási et.al.: Avalanches in the Lung: A Statistical Mechanical Model. PRL 1996, doi 10.1103/PhysRevLett.76.2192



- az (i, j) szelep $P_{i,j}$ nyomáskülönbségnél nyit
 i : szint (generáció), j : szinten belül melyik oszlop
- a $P_{i,j}$ -k egyenletesek és korrelálatlanok a $[0, 1]$ -ben
- kezdeti állapot: minden szelep (szakasz a fán) zárt

Tűdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Tűdő működés SOC modelljének részletei

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Tüdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb
Biológiai evolúció
Tüdő működés

Tüdő működés SOC modelljének részletei

- kezdetben $\Delta P = 0$, és minden szelep zárva van
- amikor ΔP eléri a $P_{0,0}$ értéket, akkor a legfelső szelep nyit a legfelső szelep: $(i, j) = (0, 0)$
 - a legfelső szelep kinyitása után nézzük meg az „alatta” lévő két szelepet $(1, 0$ és $1, 1)$, és amelyeknek a $P_{i,j}$ zárónyomása kisebb, mint az aktuális ΔP , azt nyissuk ki
 - így tovább: nyissuk ki az összes nyitott szelep alatt ΔP -nél gyengébben záró szelep(ek)et

Tüdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb
Biológiai evolúció
Tüdő működés

Tüdő működés SOC modelljének részletei

- kezdetben $\Delta P = 0$, és minden szelep zárva van
- amikor ΔP eléri a $P_{0,0}$ értéket, akkor a legfelső szelep nyit a legfelső szelep: $(i, j) = (0, 0)$
 - a legfelső szelep kinyitása után nézzük meg az „alatta” lévő két szelepet $(1, 0)$ és $(1, 1)$, és amelyeknek a $P_{i,j}$ zárónyomása kisebb, mint az aktuális ΔP , azt nyissuk ki
 - így tovább: nyissuk ki az összes nyitott szelep alatt ΔP -nél gyengébben záró szelep(ek)et
- megjegyzés: a számolás a gyakorlatban történhet úgy, hogy a ΔP -t mindig a már nyitott tartomány szélén lévő összes zárt szelep $P_{i,j}$ értékei közül a legkisebbig növeljük
- ekkor kinyílik az egyik zárt szelep (vagy több), és az alatta (alattuk) lévő tartomány vagy annak egy része

Tüdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő működés SOC modelljének részletei

- kezdetben $\Delta P = 0$, és minden szelep zárva van
- amikor ΔP eléri a $P_{0,0}$ értéket, akkor a legfelső szelep nyit a legfelső szelep: $(i, j) = (0, 0)$
 - a legfelső szelep kinyitása után nézzük meg az „alatta” lévő két szelepet $(1, 0$ és $1, 1)$, és amelyeknek a $P_{i,j}$ zárónyomása kisebb, mint az aktuális ΔP , azt nyissuk ki
 - így tovább: nyissuk ki az összes nyitott szelep alatt ΔP -nél gyengébben záró szelep(ek)et
- megjegyzés: a számolás a gyakorlatban történhet úgy, hogy a ΔP -t mindig a már nyitott tartomány szélén lévő összes zárt szelep $P_{i,j}$ értékei közül a legkisebbig növeljük
- ekkor kinyílik az egyik zárt szelep (vagy több), és az alatta (alattuk) lévő tartomány vagy annak egy része
- a számolás az utolsó szelep nyitásáig megy

Tűdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Példa

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Tüdő működés SOC modellje

Modell részletesen

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Példa

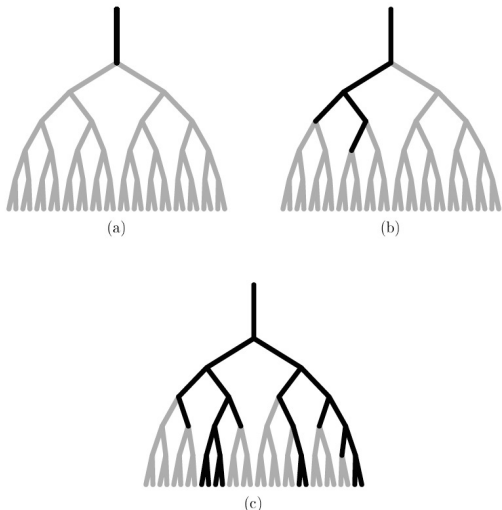


Figure 3.5: Typical development of avalanches in the lung model. (a) After the main alveola has opened, a small part of the lung also opens (b) due to lower critical pressure in that region. (c) The situation after a large avalanche: about the half of alveoli are open (after [9]).

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Összes lavina helyett csak az első lavina méreteloszlása

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

A szelepek erősségei valós számok, ezért

- nincsen két azonos szelep erősség
- a külső nyomás növelése során minden lavina úgy történik, hogy megnyílik egy zárt szelep és alatta nulla vagy több további szelep

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Összes lavina helyett csak az első lavina méreteloszlása

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb
Biológiai evolúció
Tűdő működés

A szelepek erősségei valós számok, ezért

- nincsen két azonos szelep erősség
- a külső nyomás növelése során minden lavina úgy történik, hogy megnyílik egy zárt szelep és alatta nulla vagy több további szelep

Ha a szintek száma $\rightarrow \infty$, akkor

- a modell (3-Cayley-fa + $P_{i,j}$) minden „al-Cayley-fán” statisztikus értelemben azonos
 - ha a lavina-méret eloszlás a teljes $0 < P_E < 1$ nyomás tartományon végighaladva hatványfüggvény,
 - akkor minden $P_{E,\min} < P_E < P_{E,\max}$ résztartományon is hatványfüggvény

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Összes lavina helyett csak az első lavina méreteloszlása

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb
Biológiai evolúció
Tűdő működés

A szelepek erősségei valós számok, ezért

- nincsen két azonos szelep erősség
- a külső nyomás növelése során minden lavina úgy történik, hogy megnyílik egy zárt szelep és alatta nulla vagy több további szelep

Ha a szintek száma $\rightarrow \infty$, akkor

- a modell (3-Cayley-fa + $P_{i,j}$) minden „al-Cayley-fán” statisztikus értelemben azonos
 - ha a lavina-méret eloszlás a teljes $0 < P_E < 1$ nyomás tartományon végighaladva hatványfüggvény,
 - akkor minden $P_{E,\min} < P_E < P_{E,\max}$ résztartományon is hatványfüggvény

Ezért az összes lavina méretének az eloszlása

- akkor és csak akkor hatványfüggvény γ kitevővel,
- ha az első lavina ($P_{0,0}$ nyitásakor) is az

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Numerikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Lavina méret definíció:

a nyomás változás hatására megnyíló szelepek száma

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Numerikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Lavina méret definíció:

a nyomás változás hatására megnyíló szelepek száma

- a Cayley-fa legalsó szintjén (levelein)
- a fa bármelyik szintjén („generációban”)

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Numerikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

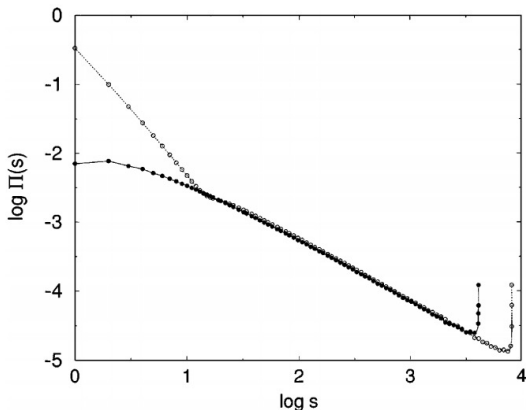
Lavina méret definíció:

a nyomás változás hatására megnyíló szelepek száma

- a Cayley-fa legalsó szintjén (levelein)
- a fa bármelyik szintjén („generációban”)

Numerikus eredmény

- 12 szintes fán
- 10^8 futással
- Két meredekség:
 $\gamma_A \approx 0.9$
 $\gamma_B \approx 1.9$



Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Analitikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Első lavina méretének eloszlása

- ekvivalens: perkoláció 3-Cayley-fán
- egzaktul megoldható

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Analitikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Első lavina méretének eloszlása

- ekvivalens: perkoláció 3-Cayley-fán
- egzaktul megoldható

Rögzítsük az első szelep nyitó nyomását: $p = P_{0,0}$

Az első lavina s méretének $\Pi(s, p)$ eloszlása p paraméterrel:

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Analitikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Első lavina méretének eloszlása

- ekvivalens: perkoláció 3-Cayley-fán
- egzaktul megoldható

Rögzítsük az első szelep nyitó nyomását: $p = P_{0,0}$

Az első lavina s méretének $\Pi(s, p)$ eloszlása p paraméterrel:

Ismert eredmény (itt nem vezetjük le) perkolációval való analógiából

$\Pi(s, p) \sim s^{-\tau} f(s^\sigma |p - p_c|)$, ahol

- $\tau = 3/2$, $\sigma = 1/2$, $p_c = 1/2$
- $f(u \ll 1) = \text{const.}$ és $f(u \gg 1) \rightarrow 0$

Tűdő működés SOC modellje

Eredmények - Analitikus

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tűdő működés

Első lavina méretének eloszlása

- ekvivalens: perkoláció 3-Cayley-fán
- egzaktul megoldható

Rögzítsük az első szelep nyitó nyomását: $p = P_{0,0}$

Az első lavina s méretének $\Pi(s, p)$ eloszlása p paraméterrel:

Ismert eredmény (itt nem vezetjük le) perkolációval való analógiából

$\Pi(s, p) \sim s^{-\tau} f(s^\sigma |p - p_c|)$, ahol

- $\tau = 3/2$, $\sigma = 1/2$, $p_c = 1/2$
- $f(u \ll 1) = \text{const.}$ és $f(u \gg 1) \rightarrow 0$

Átlagoljunk véletlenszerűen (egyenletesen) választott $p = P_{0,0}$ -ra:

- integrálás: $\Pi(s) = \int_0^1 dp \Pi(s, p)$
- változótranszformáció: $z = s^\sigma |p - p_c|$, $dp = s^{-\sigma} dz$
- az analitikus eredmény két exponens:
 - $n(s) = s^{-\tau-\sigma} \rightarrow \tau + \sigma \approx 1.9 = \gamma_B$ (numerikus)
 - másik exponens 1, ami kb. a numerikus $\gamma_A \approx 0.9$

Tüdő működés SOC modellje

Alkalmazás

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő járatok záródása (betegség, sérülés) esetén

- lélegeztetőgép szükséges
- a túlnyomás nem lehet sokáig magas
- de ki kell nyitni minél több járatot

Tüdő működés SOC modellje

Alkalmazás

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő járatok záródása (betegség, sérülés) esetén

- lélegeztetőgép szükséges
- a túlnyomás nem lehet sokáig magas
- de ki kell nyitni minél több járatot

Megoldás:

- váltakozó amplitúdójú P_E lélegeztető túlnyomás

Tüdő működés SOC modellje

Alkalmazás

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő járatok záródása (betegség, sérülés) esetén

- lélegeztetőgép szükséges
- a túlnyomás nem lehet sokáig magas
- de ki kell nyitni minél több járatot

Megoldás:

- váltakozó amplitúdójú P_E lélegeztető túlnyomás

A 3-Cayley-fa szerkezet esetén

- a p_c kritikus pont közelében a felvett O_2 mennyisége a $|P_E - p_c|^n$ hatványfüggvény szerint növekszik, ahol n fa rendje (pl. a 3-Cayley fa rendje 2)

Modell és mérés: Suki B, et.al.: Mathematical Modeling of the First Inflation of Degassed Lungs. Annals of Biomedical Engineering, Vol. 26, pp. 608–617 (1998)

Tüdő működés SOC modellje

Alkalmazás

Önszervezően
kritikus
rendszerek

Bevezetés,
alapfogalmak

Self-organized
criticality

Homokdomb

Biológiai evolúció

Tüdő működés

Tüdő járatok záródása (betegség, sérülés) esetén

- lélegeztetőgép szükséges
- a túlnyomás nem lehet sokáig magas
- de ki kell nyitni minél több járatot

Megoldás:

- váltakozó amplitúdójú P_E lélegeztető túlnyomás

A 3-Cayley-fa szerkezet esetén

- a p_c kritikus pont közelében a felvett O_2 mennyisége a $|P_E - p_c|^n$ hatványfüggvény szerint növekszik, ahol n fa rendje (pl. a 3-Cayley fa rendje 2)

Modell és mérés: Suki B, et.al.: Mathematical Modeling of the First Inflation of Degassed Lungs. Annals of Biomedical Engineering, Vol. 26, pp. 608–617 (1998)

A rövid ideig tartó nagy túlnyomások alatt erősebben nő az oxigén-felvétel, mint amennyivel csökken a hosszabb ideig tartó alacsonyabb túlnyomások alatt.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája I. :

Mikrobiológiai háttér, morfológiai diagram, Fisher-egyenlet, instabilitás eredete

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Bevezetés

A baktériumok

- (nagyreszt) szabadon élő **egysejtű** élőlények
- **telepeket** (colonies) alkotnak
- a **környezeti** hatásoktól erősen függenek

A baktériumok

- (nagy részt) szabadon élő **egysejtű** élőlények
- **telepeket** (colonies) alkotnak
- a **környezeti** hatásoktól erősen függenek

- a kísérletekben a soksejtűek sejtjeinél könnyebben kezelhetőek
- változatos tér- és időbeli **mintázatokat** tudnak létrehozni
- a mintázatok gyakran nem függenek a kölcsönhatás részleteitől tehát általánosak (univerzálisak)

A baktériumok

- (nagy részt) szabadon élő **egysejtű** élőlények
- **telepeket** (colonies) alkotnak
- a **környezeti** hatásoktól erősen függenek

- a kísérletekben a soksejtűek sejtjeinél könnyebben kezelhetőek
- változatos tér- és időbeli **mintázatokat** tudnak létrehozni
- a mintázatok gyakran nem függenek a kölcsönhatás részleteitől tehát általánosak (univerzálisak)

- baktériumok kölcsönhatási/mozgási szabályai ismertebbek
- a kísérletekben mért jelenségek reprodukálhatóak számítógépes (numerikus) és analitikus módszerekkel

A baktériumok

- (nagy részt) szabadon élő **egysejtű** élőlények
 - **telepeket** (colonies) alkotnak
 - a **környezeti** hatásoktól erősen függenek

 - a kísérletekben a soksejtűek sejtjeinél könnyebben kezelhetőek
 - változatos tér- és időbeli **mintázatokat** tudnak létrehozni
 - a mintázatok gyakran nem függenek a kölcsönhatás részleteitől tehát általánosak (univerzálisak)

 - baktériumok kölcsönhatási/mozgási szabályai ismertebbek
 - a kísérletekben mért jelenségek reprodukálhatóak számítógépes (numerikus) és analitikus módszerekkel
- Baktériumtelep:
Önszerveződő biológiai jelenségek jól vizsgálható példája

Bevezetés

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

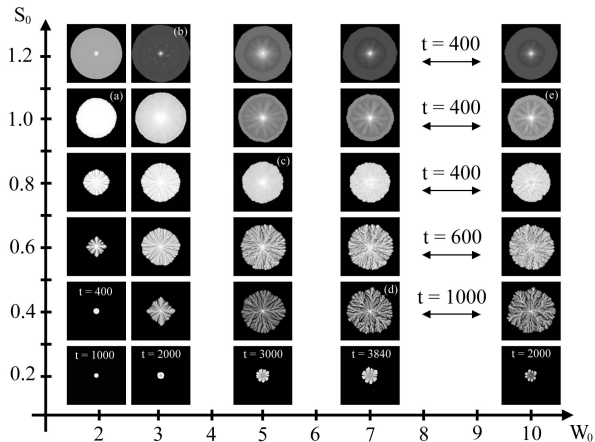
Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Példák (Petri csészében):



(math.arizona.edu)

S_0 : kezdeti tápanyag-koncentráció, W_0 : táptalaj nedvessége

Bevezetés

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A telepek (colonies) alakját két közvetlen hatás alakítja:

- a baktériumok osztódása és
- mozgása

A telepek (colonies) alakját két közvetlen hatás alakítja:

- a baktériumok osztódása és
- mozgása

Mi befolyásolja ezt a két közvetlen hatást?

- tápanyagtartalom, táptalaj keménysége, nedvességtartalma
- hőmérséklet
- osztódási sebesség
- baktériumok mozgása (chemotaxis):
mozgás kémiai koncentráció gradiens érzékelése alapján
 - tápanyagok
 - mérgező anyagok

Bevezetés

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A telepek (colonies) alakját két közvetlen hatás alakítja:

- a baktériumok osztódása és
- mozgása

Mi befolyásolja ezt a két közvetlen hatást?

- tápanyagtartalom, táptalaj keménysége, nedvességtartalma
- hőmérséklet
- osztódási sebesség
- baktériumok mozgása (chemotaxis):
mozgás kémiai koncentráció gradiens érzékelése alapján
 - tápanyagok
 - mérgező anyagok

A baktériumok mozgása általában

- (1) „run and tumble” vagy
- (2) „gliding”

Bevezetés

Baktériumok szaporodási sebessége

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A tápanyag koncentrációjától való függés:

Bevezetés

Baktériumok szaporodási sebessége

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A tápanyag koncentrációjától való függés:

- kezdeti gyors növekedés után telítésbe megy
- van egy alsó küszöb, ami alatt nincsen növekedés

Bevezetés

Baktériumok szaporodási sebessége

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

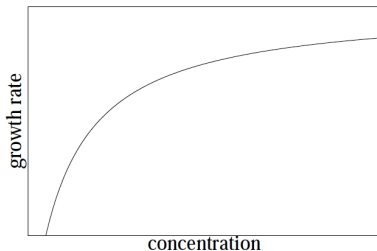
F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A tápanyag koncentrációjától való függés:

- kezdeti gyors növekedés után telítésbe megy
- van egy alsó küszöb, ami alatt nincsen növekedés



Bevezetés

Baktériumtelepek morfológiai diagramja

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Példa:

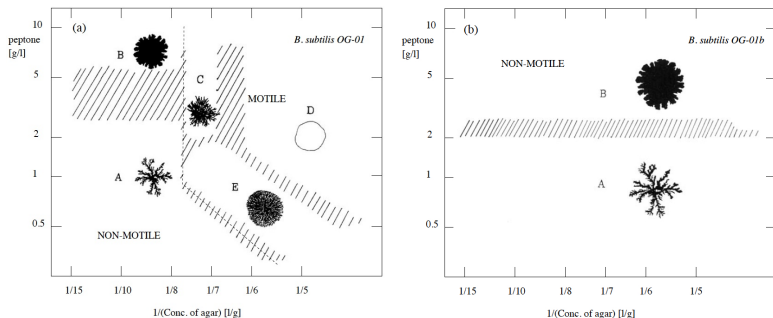


Figure 4.4: Morphology diagram of the strain *Bacillus subtilis* OG-01 (a) and a non motile mutant OG-01b (b) as a function of peptone and agar concentration. The dashed line in (a) indicates the boundary of the active movement of bacterial cells inside the colonies. The morphologies are classified as follows: fractal (A), compact with rough boundary (B), branching with periodic growth phases (C), compact with diffuse boundary (D) and dense branching (E). In the case of the non motile strain the regions A and B seen in (a) expand laterally, while regions C, D and E disappear.

Bevezetés

Baktériumok mozgása

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Baktériumok mozgásának két gyakori formája:

Baktériumok mozgásának két gyakori formája:

(1) Egyenes haladás és véletlenszerű bolyongás váltakozása. („run and tumble”, bacterial tumbling)

- Alapja: a baktérium az ostorát (vagy ostor kötegét) mindkét irányban tudja forgatni az ostor kapcsolódásánál lévő molekuláris „motorral”.
- ostor(köteg) forgatása egyik módon → egyenes haladás
- másik módon (pl. széteső köteg) → bolyongás, irányváltás

(2) „Gliding”: pl. tapadás-elengedés módszerrel.

Baktériumok mozgásának két gyakori formája:

(1) Egyenes haladás és véletlenszerű bolyongás váltakozása.
(„run and tumble”, bacterial tumbling)

- Alapja: a baktérium az ostorát (vagy ostor kötegét) mindkét irányban tudja forgatni az ostor kapcsolódásánál lévő molekuláris „motorral”.
- ostor(köteg) forgatása egyik módon → egyenes haladás
- másik módon (pl. széteső köteg) → bolyongás, irányváltás

(2) „Gliding”: pl. tapadás-elengedés módszerrel.

Videók:

- 10mp: flagellum (ostor) motorja
<https://youtu.be/xEVq7jCT4kw>
- 2 perc: motor összeállítása:
<https://youtu.be/hLTFiekwFy8>

A mozgás mikrobiológiai háttere

Több ostor mozgatásával

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A vizsgált baktériumok jellemző mérete $4\mu m \times 1\mu m \times 1\mu m$

- membránján hosszú vékony ostorok („propellerek”)
- ostor alján lévő motor: legkisebb ismert forgó motor
- kis méret → kis Reynolds-szám, lamináris áramlás

A mozgás mikrobiológiai háttere

Több ostor mozgatásával

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

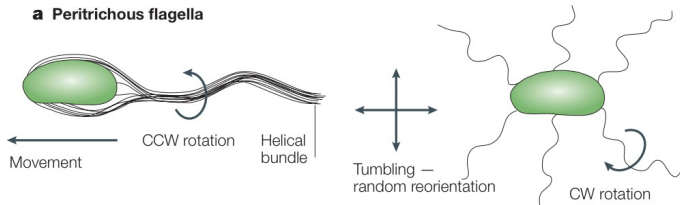
F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A vizsgált baktériumok jellemző mérete $4\mu m \times 1\mu m \times 1\mu m$

- membránján hosszú vékony ostorok („propellerek”)
- ostor alján lévő motor: legkisebb ismert forgó motor
- kis méret → kis Reynolds-szám, lamináris áramlás

Gyakori megoldás: Több ostor



CW: clockwise, CCW: counter-clockwise, peritrichous: a felszínen egyenletesen elosztva

Butler, Camilli. Nat Rev Microbiol 2005, <http://pubmed.org/16012515>

A mozgás mikrobiológiai háttere

Több ostor mozgatásával

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

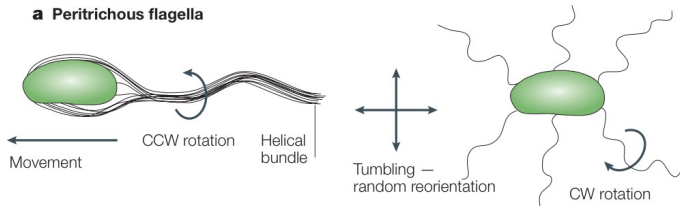
F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A vizsgált baktériumok jellemző mérete $4\mu m \times 1\mu m \times 1\mu m$

- membránján hosszú vékony ostorok („propellerek”)
- ostor alján lévő motor: legkisebb ismert forgó motor
- kis méret → kis Reynolds-szám, lamináris áramlás

Gyakori megoldás: Több ostor



CW: clockwise, CCW: counter-clockwise, peritrichous: a felszínen egyenletesen elosztva

Butler, Camilli. Nat Rev Microbiol 2005, <http://pubmed.org/16012515>

- CW forgás, helikális szálak együtt → propeller, előre tol (run) mintát vesz: ha jófelé halad (pl. cukor felé), CW marad
- CCW, szálak szétesnek → RND bolyongás (Brown, tumble)

A mozgás mikrobiológiai háttere

Egy ostor mozgásával

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

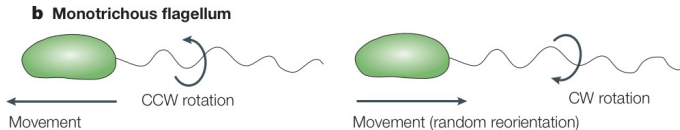
Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Ritkább megoldás: Egy ostor



CW: clockwise, CCW: counter-clockwise, monotrichous: egy ostora van

Butler, Camilli. Nat Rev Microbiol 2005, <http://pubmed.org/16012515>

A mozgás mikrobiológiai háttere

Egy ostor mozgásával

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

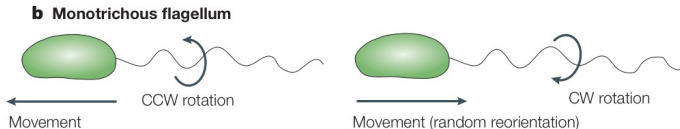
Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Ritkább megoldás: Egy ostor



CW: clockwise, CCW: counter-clockwise, monotrichous: egy ostora van

Butler, Camilli. Nat Rev Microbiol 2005, <http://pubmed.org/16012515>

- CW forgás esetén halad egyenes vonalban
- CCW forgás esetén véletlenszerű irányváltás

Baktériumtelepek tenyésztése

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Baktériumtelep növesztése Petri-csészében.
Morfológia: önszervezően keletkező alakzatok

Baktériumtelepek tenyésztése

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

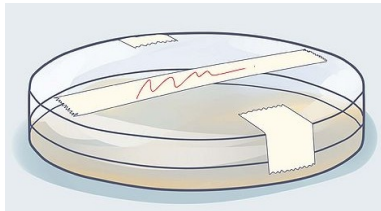
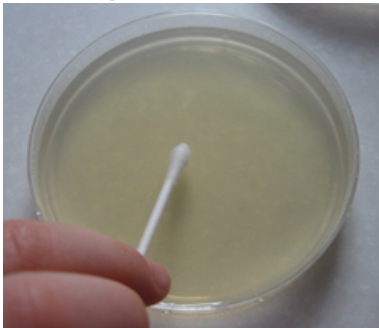
Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Baktériumtelep növesztése Petri-csészében.
Morfológia: önszervezően keletkező alakzatok



Baktériumtelepek tenyésztése

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

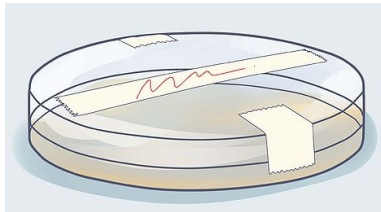
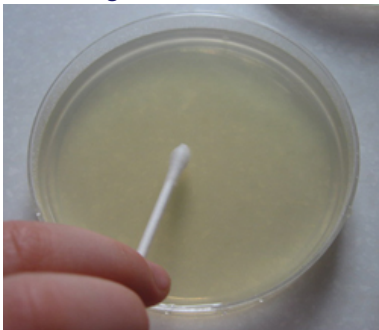
F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Baktériumtelep növesztése Petri-csészében.

Morfológia: önszervezően keletkező alakzatok



- az edényben agar alapú gél van (az agar egy alga)
- a gélben van víz, tápanyag, stb
- a gél tetején a baktériumok szaporodnak

Baktériumtelepek tenyésztése

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

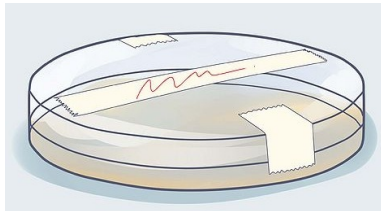
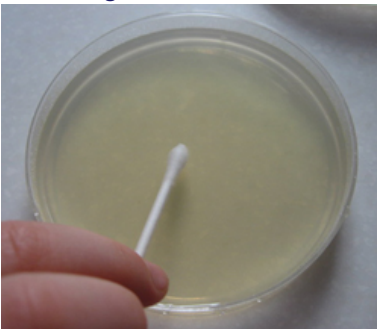
Fisher-Kölmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kölmogorov összefoglalás

Baktériumtelep növesztése Petri-csészében.
Morfológia: önszervezően keletkező alakzatok



- az edényben agar alapú gél van (az agar egy alga)
- a gélben van víz, tápanyag, stb
- a gél tetején a baktériumok szaporodnak
- az agar koncentráció szabályozza a gél keménységét
- sok tápanyag vagy kemény gél ⇒ **ágas-bogas szerkezet**

Baktériumtelepek morfológiája

Dendritikus (ágas-bogas) szerkezet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

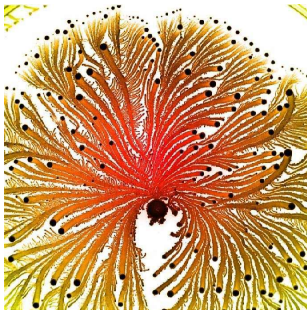
Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás



Baktériumtelepek morfológiája

Dendritikus (ágas-bogas) szerkezet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

**Baktériumtelepek
morfológiája**

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A dendritikus szerkezetű telepekben egy ág akár 1 mm vastag is lehet. Ilyen alakzatok általában diffúzió-limitált rendszerekben keletkeznek.

Baktériumtelepek morfológiája

Dendritikus (ágas-bogas) szerkezet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

**Baktériumtelepek
morfológiája**

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A dendritikus szerkezetű telepekben egy ág akár 1mm vastag is lehet. Ilyen alakzatok általában diffúzió-limitált rendszerekben keletkeznek.

- belül már nincsen tápanyag, kívülről diffundál befelé
- az szaporodik, aki sok tápanyagot kap → aki a szélén van

Baktériumtelepek morfológiája

Dendritikus (ágas-bogas) szerkezet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A dendritikus szerkezetű telepekben egy ág akár 1mm vastag is lehet. Ilyen alakzatok általában diffúzió-limitált rendszerekben keletkeznek.

- belül már nincsen tápanyag, kívülről diffundál befelé
- az szaporodik, aki sok tápanyagot kap → aki a szélén van

A dendritikus szerkezet a tápanyag-felvételre optimalizált:

- sokan vannak közel a felülethez

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram: Pontszerű „forrás”, változó tápanyag és agar koncentráció

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A telep: a baktériumok által adott időpontig használt terület

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram: Pontszerű „forrás”, változó tápanyag és agar koncentráció

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

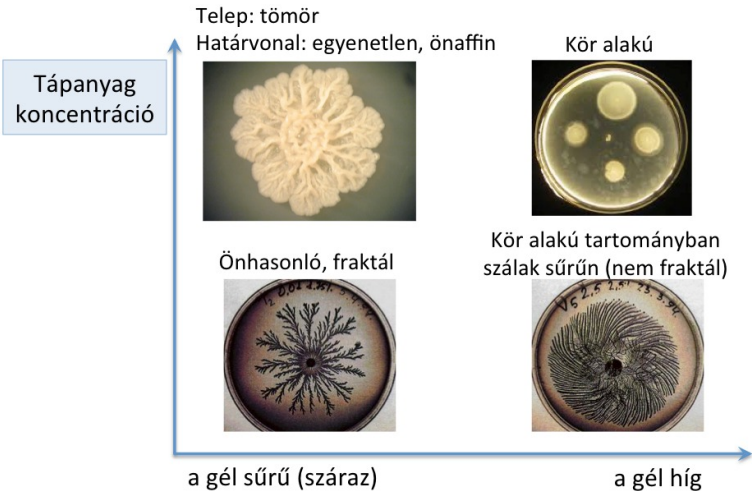
Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A telep: a baktériumok által adott időpontig használt terület



Baktériumtelepek morfológiája

További baktériumtelep alakzatok

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Spirálszerű karok



„Ujjasodás” (fraktál) után
genetikai kapcsoló hatására sűrű



Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Sok táplálék, nedves felület

→ tudnak mozogni, kb. diffundálnak a táptalaj felszínén

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

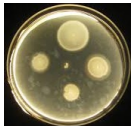
Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Sok táplálék, nedves felület

→ tudnak mozogni, kb. diffundálnak a táptalaj felszínén

Kezdetben kis folt

- folyik szét → diffúzió
- szaporodik → forrás tag



Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

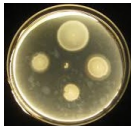
Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Sok táplálék, nedves felület

→ tudnak mozogni, kb. diffundálnak a táptalaj felszínén

Kezdetben kis folt

- folyik szét → diffúzió
- szaporodik → forrás tag



⇒ **Fisher-Kolmogorov** egyenlet (2d tér + 1d idő)

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

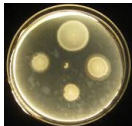
Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Sok táplálék, nedves felület

→ tudnak mozogni, kb. diffundálnak a táptalaj felszínén

Kezdetben kis folt

- folyik szét → diffúzió
- szaporodik → forrás tag



⇒ **Fisher-Kolmogorov** egyenlet (2d tér + 1d idő)

- $\rho(\vec{r}, t)$: baktériumok sűrűsége
- ∂_t : idő szerinti parciális derivált
- ∇ : térbeli koordináták szerinti parciális derivált
- D_ρ : diffúziós állandó
- c : tápanyag koncentrációja
- $f(\rho, c)$: forrás tag (osztódással keletkeznek baktériumok)

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

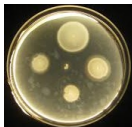
Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Sok táplálék, nedves felület

→ tudnak mozogni, kb. diffundálnak a táptalaj felszínén

Kezdetben kis folt

- folyik szét → diffúzió
- szaporodik → forrás tag



⇒ **Fisher-Kolmogorov** egyenlet (2d tér + 1d idő)

- $\rho(\vec{r}, t)$: baktériumok sűrűsége
- ∂_t : idő szerinti parciális derivált
- ∇ : térbeli koordináták szerinti parciális derivált
- D_ρ : diffúziós állandó
- c : tápanyag koncentrációja
- $f(\rho, c)$: forrás tag (osztódással keletkeznek baktériumok)

$$\Rightarrow \partial_t \rho = \underbrace{D_\rho \cdot \nabla^2 \rho}_{\text{diffuzio}} + \underbrace{f(\rho, c)}_{\text{forras}}$$

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

$$\overline{d^2(t)} = 2D_\rho \cdot t$$

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

$$\overline{d^2(t)} = 2D_\rho \cdot t$$

Az $f(\rho, c)$ „forrás” tag a baktériumok keletkezését (osztódási sebességét) írja le a ρ baktérium-sűrűség és a c tápanyag koncentráció függvényében:

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

$$\overline{d^2(t)} = 2D_\rho \cdot t$$

Az $f(\rho, c)$ „forrás” tag a baktériumok keletkezését (osztódási sebességét) írja le a ρ baktérium-sűrűség és a c tápanyag koncentráció függvényében:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

$$\overline{d^2(t)} = 2D_\rho \cdot t$$

Az $f(\rho, c)$ „forrás” tag a baktériumok keletkezését (osztódási sebességét) írja le a ρ baktérium-sűrűség és a c tápanyag koncentráció függvényében:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken
- alacsony c esetén a növekedés arányos c -vel

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Paraméterek

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A D_ρ diffúziós állandó mérhető a baktériumnak az origótól (a kiindulási helytől) való átlagos távolsága alapján:

$$\overline{d^2(t)} = 2D_\rho \cdot t$$

Az $f(\rho, c)$ „forrás” tag a baktériumok keletkezését (osztódási sebességét) írja le a ρ baktérium-sűrűség és a c tápanyag koncentráció függvényében:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken
- alacsony c esetén a növekedés arányos c -vel

A legegyszerűbb függvény típus, ami mindezt teljesíti:

$$f(\rho, c) = r(c) \underbrace{\rho(\rho^* - \rho)}_{\text{logistic function}}$$

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho, c)$ függvény:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken
- alacsony c esetén a növekedés arányos c -vel

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho, c)$ függvény:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken
- alacsony c esetén a növekedés arányos c -vel

Milyen az $f(\rho, c)$ függvény alakja? (vázlatosan)

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

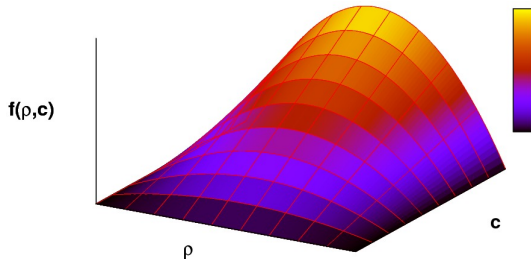
F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho, c)$ függvény:

- alacsony ρ sűrűség esetén $f(\rho)$ arányos ρ -val
- magasabb ρ -nál telítés, utána csökkenés (mérgező anyagcsere melléktermékek feldúsulása miatt)
- egy küszöb ρ^* értéknél $f(\rho^*) = 0$ -ra csökken
- alacsony c esetén a növekedés arányos c -vel

Milyen az $f(\rho, c)$ függvény alakja? (vázlatosan)



Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

**Fisher-Kolmogorov
egyenlet**

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Az $f(\rho)$ forrás tag további egyszerűsítése:

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho)$ forrás tag további egyszerűsítése:

- $\rho = \rho^*$ -nál a növekedési ráta = 0
- $\rho > \rho^*$ -nál nincsen növekedés
- mértékegység választásával $\rho^* := 1$

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho)$ forrás tag további egyszerűsítése:

- $\rho = \rho^*$ -nál a növekedési ráta = 0
- $\rho > \rho^*$ -nál nincsen növekedés
- mértékegység választásával $\rho^* := 1$

$$f(\rho) = r(c) \rho (1 - \rho)$$

Kompakt alak

Fisher-Kolmogorov egyenlet – Forrás tag

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

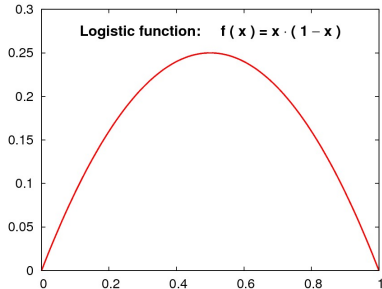
F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Az $f(\rho)$ forrás tag további egyszerűsítése:

- $\rho = \rho^*$ -nál a növekedési ráta = 0
- $\rho > \rho^*$ -nál nincsen növekedés
- mértékegység választásával $\rho^* := 1$

$$f(\rho) = r(c) \rho(1 - \rho)$$



Fisher-Kolmogorov egyenlet

Numerikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

**F-K numerikus
megoldása**

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r(c) \rho (1 - \rho)$$

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Numerikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r(c) \rho (1 - \rho)$$

Numerikus eredmény a $\rho(x, t)$ függvényre:

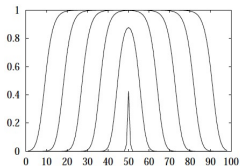


Figure 4.9: Typical result of the numerical integration of the Fisher equation (4.8) starting from a localised perturbation ($D_\rho = 1$, $f(x) = x - x^2$, i.e., $r = 1$). The $\rho(x, t)$ curves are plotted for $t = 0, 5, 10, 15, 20$ and 25 . The domain grows with a stationary speed of $v = 2$.

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Numerikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r(c) \rho (1 - \rho)$$

Numerikus eredmény a $\rho(x, t)$ függvényre:

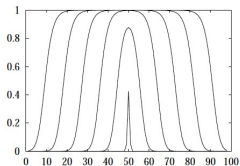


Figure 4.9: Typical result of the numerical integration of the Fisher equation (4.8) starting from a localised perturbation ($D_\rho = 1$, $f(x) = x - x^2$, i.e., $r = 1$). The $\rho(x, t)$ curves are plotted for $t = 0, 5, 10, 15, 20$ and 25 . The domain grows with a stationary speed of $v = 2$.

Numerikus eredmény:

a baktérium tartomány $v_x = 2\sqrt{r D_\rho}$ sebességgel terjed ki.

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Numerikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r(c) \rho (1 - \rho)$$

Numerikus eredmény a $\rho(x, t)$ függvényre:

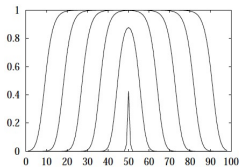


Figure 4.9: Typical result of the numerical integration of the Fisher equation (4.8) starting from a localised perturbation ($D_\rho = 1$, $f(x) = x - x^2$, i.e., $r = 1$). The $\rho(x, t)$ curves are plotted for $t = 0, 5, 10, 15, 20$ and 25 . The domain grows with a stationary speed of $v = 2$.

Numerikus eredmény:

a baktérium tartomány $v_x = 2\sqrt{rD_\rho}$ sebességgel terjed ki.

Ezért a sűrűsége egy

„ansatz” (próbafüggvény) lehet $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol $u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Analitikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r \rho (1 - \rho)$$

Próbafüggvény: $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol

$u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Analitikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r \rho (1 - \rho)$$

Próbafüggvény: $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol
 $u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

A próbafüggvény behelyettesítésével:

$$\partial_t \tilde{\rho} = D_\rho \tilde{\rho}'' + v_x \tilde{\rho}' + f(\tilde{\rho})$$

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Analitikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r \rho (1 - \rho)$$

Próbafüggvény: $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol
 $u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

A próbafüggvény behelyettesítésével:

$$\partial_t \tilde{\rho} = D_\rho \tilde{\rho}'' + v_x \tilde{\rho}' + f(\tilde{\rho})$$

Létezik analitikus megoldása:
tetszőleges $v_x > 0$ megoldja az egyenletet $\tilde{\rho}$ -ra

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Analitikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r \rho (1 - \rho)$$

Próbafüggvény: $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol
 $u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

A próbafüggvény behelyettesítésével:

$$\partial_t \tilde{\rho} = D_\rho \tilde{\rho}'' + v_x \tilde{\rho}' + f(\tilde{\rho})$$

Létezik analitikus megoldása:
tetszőleges $v_x > 0$ megoldja az egyenletet $\tilde{\rho}$ -ra

A valóságban mindig pontosan egy v növekedési sebesség van.

⇒ az egyenletes növekedés kihasználása nem elegendő ahhoz, hogy a megvalósuló növekedési sebességet megtaláljuk

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Analitikus megoldás 1+1 dimenzióban

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

A Fisher-Kolmogorov egyenlet az egyszerűsített forrás taggal:

$$\partial_t \rho = D_\rho \cdot \nabla^2 \rho + r \rho (1 - \rho)$$

Próbafüggvény: $\tilde{\rho}(u, t) = \rho(x, t)$, ahol
 $u = x - v_x t$, $v_x > 0$, $\rho(-\infty) = 1$ és $\rho(+\infty) = 0$.

A próbafüggvény behelyettesítésével:

$$\partial_t \tilde{\rho} = D_\rho \tilde{\rho}'' + v_x \tilde{\rho}' + f(\tilde{\rho})$$

Létezik analitikus megoldása:
tetszőleges $v_x > 0$ megoldja az egyenletet $\tilde{\rho}$ -ra

A valóságban mindig pontosan egy v növekedési sebesség van.

⇒ az egyenletes növekedés kihasználása nem elegendő ahhoz, hogy a megvalósuló növekedési sebességet megtaláljuk

Mintázatképződési jelenségeknél ez gyakori, „sebesség szelekció problémának” szokták nevezni.

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Fisher-Kolmogorov egyenlet összefoglalása:

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás,
osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek
morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt
morfológia

Fisher-Kolmogorov
egyenlet

F-K numerikus
megoldása

F-K analitikus
megoldása

Fisher-Kolmogorov
összefoglalás

Fisher-Kolmogorov egyenlet összefoglalása:

Diffúzió és forrás tag

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Fisher-Kolmogorov egyenlet összefoglalása:

Diffúzió és forrás tag

Numerikus megoldás: állandó sebességgel terjedő „front”

Fisher-Kolmogorov egyenlet

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája I.

Bevezetés

Mozgás, osztódás

Mozgás: Több ostor

Mozgás: Egy ostor

Telep tenyésztése

Baktériumtelepek morfológiája

Morfológiai diagram

További alakzatok

Kompakt morfológia

Fisher-Kolmogorov egyenlet

F-K numerikus megoldása

F-K analitikus megoldása

Fisher-Kolmogorov összefoglalás

Fisher-Kolmogorov egyenlet összefoglalása:

Diffúzió és forrás tag

Numerikus megoldás: állandó sebességgel terjedő „front”

Analitikus megoldás: az állandó sebesség feltételezése (ansatz) nem elegendő a megvalósuló sebesség kiválasztásához

Bevezetés

Baktériumtelepek
felszíne

Növekedő felület
modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó
morfológia

DLA

DLA növekedő
baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis)
növekedés

Videók

Baktériumtelepek geometriája II:

Fraktálnövekedés modelljei

(önhasonló, önaffin, irányított perkoláció)

Bevezetés

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A sima felülettel induló telep felülete miért válik hullámossá?

Baktériumtelepek felszíne

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A sima felülettel induló telep felülete miért válik hullámossá?

Vajon ez egy általános jelenség,
ami a biológiában és máshol is gyakori?

Baktériumtelepek felszíne

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagzott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A sima felülettel induló telep felülete miért válik hullámossá?

Vajon ez egy általános jelenség,
ami a biológiában és máshol is gyakori?

Leírható-e a felület növekedése matematikai egyenletekkel?

Baktériumtelepek felszíne

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A sima felülettel induló telep felülete miért válik hullámossá?

Vajon ez egy általános jelenség,
ami a biológiában és máshol is gyakori?

Leírható-e a felület növekedése matematikai egyenletekkel?

Milyen felület típusokat szeretnénk leírni?

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Növekedő felület modelljei

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Kompakt alakzat növekedésének leírása

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

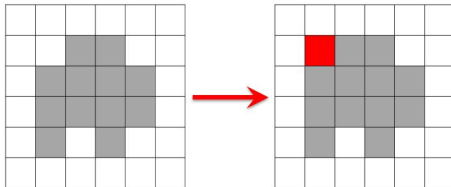
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Kompakt alakzat növekedésének leírása

Murray Eden modellje 1961-ből („Eden growth model”)

- 2d rács mezői: betölthető helyek
- kiindulás: egyetlen „részcseke” (egy betöltött hely)
- időlépés:
a betöltött mezőkkel szomszédos helyen 1 új részcseke



Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

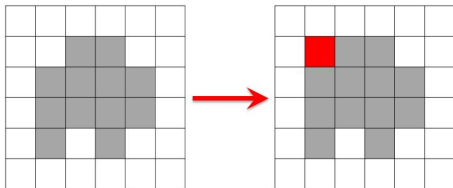
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Kompakt alakzat növekedésének leírása

Murray Eden modellje 1961-ből („Eden growth model”)

- 2d rács mezői: betölthető helyek
- kiindulás: egyetlen „részcseke” (egy betöltött hely)
- időlépés:
a betöltött mezőkkel szomszédos helyen 1 új részcseke



Az új mező kiválasztási valószínűsége többféle lehet:

- A, mindegyik lehetséges új mező azonos valószínűséggel
- B, több betöltött szomszéd esetén nagyobb valószínűség

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa: számítógépes szimulációs „pillanatkép”

2d rácson definiált Eden modell

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

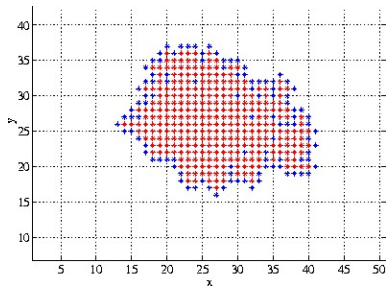
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa: számítógépes szimulációs „pillanatkép”

2d rácson definiált Eden modell



Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

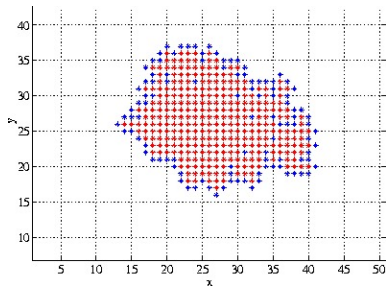
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa: számítógépes szimulációs „pillanatkép”

2d rácson definiált Eden modell



Megjegyzés:

- a rács elronthatja a forgatási szimmetriát
- a folytonos modell realiztikusabb és nem túl nehéz a megvalósítása (programozási idő, CPU idő, memória)

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa folytonos esetben

Kuennen és Wang, J. Stat. Mech. 2008 doi:10.1088/1742-5468/2008/05/P05014

Eden modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagzott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa folytonos esetben

Kuennen és Wang, J. Stat. Mech. 2008 doi:10.1088/1742-5468/2008/05/P05014

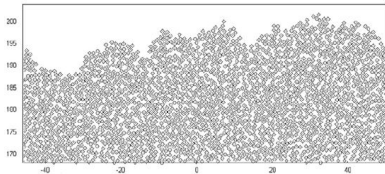
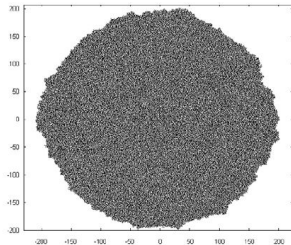


Figure 6. Two-dimensional off-lattice Eden cluster of 100 000 cells in the radial geometry, and a detail of the surface.

Eden modell

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

Eden modell

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

A modell lényege:

- növekedés a felületen
- a „részecskék” nem tudnak elmozdulni (nincsen diffúzió)

Eden modell

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagzott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

A modell lényege:

- növekedés a felületen
- a „részecskék” nem tudnak elmozdulni (nincsen diffúzió)

A modell egyszerű, sok növekedési jelenség így működik

Eden modell

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

A modell lényege:

- növekedés a felületen
- a „részecskék” nem tudnak elmozdulni (nincsen diffúzió)

A modell egyszerű, sok növekedési jelenség így működik

Általánosabban megfogalmazva:

a növekedést két hatás befolyásolja

- (i) az egyik hatás simítja a felületet (völgyek feltöltése)
- (ii) a másik hatástól „durvul” a felület (zaj erősödik)

Eden modell

Összefoglalás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

A modell lényege:

- növekedés a felületen
- a „részecskék” nem tudnak elmozdulni (nincsen diffúzió)

A modell egyszerű, sok növekedési jelenség így működik

Általánosabban megfogalmazva:

a növekedést két hatás befolyásolja

- (i) az egyik hatás simítja a felületet (völgyek feltöltése)
- (ii) a másik hatástól „durvul” a felület (zaj erősödik)

Az eredményként kapott határvonal **önaffin**

Az Eden modell felülete tartalmaz „túlnyúlásokat” (overhangs)

A modell lényege:

- növekedés a felületen
- a „részecskék” nem tudnak elmozdulni (nincsen diffúzió)

A modell egyszerű, sok növekedési jelenség így működik

Általánosabban megfogalmazva:

a növekedést két hatás befolyásolja

- az egyik hatás simítja a felületet (völgyek feltöltése)
- a másik hatástól „durvul” a felület (zaj erősödik)

Az eredményként kapott határvonal **önaffin**

A felület durvulását leíró egyik folytonos egyenlet:

→ **KPZ egyenlet**

KPZ modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Kardar, Parisi, Zhang: Dynamic scaling of growing surfaces.
Physical Review Letters (1986)

KPZ modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagzott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Kardar, Parisi, Zhang: Dynamic scaling of growing surfaces.
Physical Review Letters (1986)

1 (tér) + 1 (idő) dimenziós modell

Kardar, Parisi, Zhang: Dynamic scaling of growing surfaces. Physical Review Letters (1986)

1 (tér) + 1 (idő) dimenziós modell

Jelölések:

- a felület magassága: $h(x, t)$
- idő szerinti parciális derivált: ∂_t
- hely koordináta szerinti parciális derivált: ∂_x
második derivált: ∂_x^2
- a felületre merőleges irányú növekedési sebesség: v
- korrelálatlan zaj tag (sztochasztikus tag): $\eta(x, t)$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

A felület függőleges irányú növekedési sebessége: $\partial_t h(x, t)$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

A felület függőleges irányú növekedési sebessége: $\partial_t h(x, t)$

A KPZ egyenletben milyen tagokból áll?

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

A felület függőleges irányú növekedési sebessége: $\partial_t h(x, t)$

A KPZ egyenletben milyen tagokból áll?

A felületet **simító hatás**: $\partial_t h(x, t) = \nu \cdot \partial_x^2 h(x, t)$

- ahol a felület deriváltja csökken (egy „púp tetején”), ott a $\partial_x^2 h(x, t)$ tag negatív
- ahol a felületen egy „gödör alja” van (derivált nő) ott ez a tag pozitív

Tehát a $\partial_x^2 h(x, t)$ tag a felülettől felfelé vagy lefelé eltérő részeket „behúzza” a felülethez.

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

A felület függőleges irányú növekedési sebessége: $\partial_t h(x, t)$

A KPZ egyenletben milyen tagokból áll?

A felületet **simító hatás**: $\partial_t h(x, t) = \nu \cdot \partial_x^2 h(x, t)$

- ahol a felület deriváltja csökken (egy „púp tetején”), ott a $\partial_x^2 h(x, t)$ tag negatív
- ahol a felületen egy „gödör alja” van (derivált nő) ott ez a tag pozitív

Tehát a $\partial_x^2 h(x, t)$ tag a felülettől felfelé vagy lefelé eltérő részeket „behúzza” a felülethez.



KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

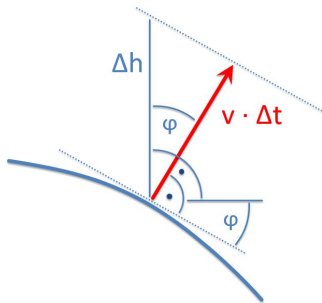
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.



KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

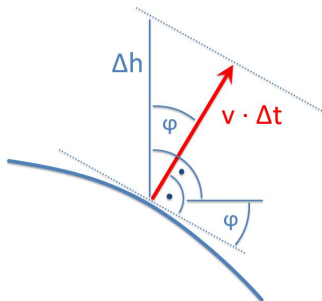
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.



Megjegyzések:

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

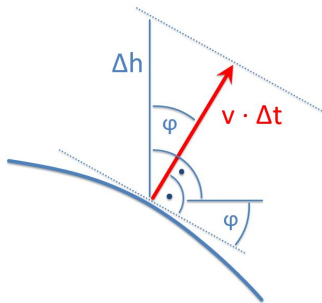
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.



Megjegyzések:

- (1) a felület „durvul”
⇒ emiatt lesz hullámos!!

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

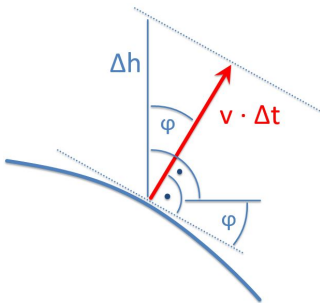
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.



Megjegyzések:

(1) a felület „durvul”
⇒ emiatt lesz hullámos!!

(2) sorfejtés alapján:

ha $\epsilon \ll 1$, akkor $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

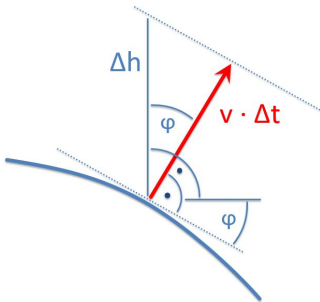
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Adjuk hozzá a **felületre merőleges növekedést** leíró tagot

Kis Δt idő esetén a felület kis része egyenessel közelíthető

A baktériumok szaporodása időben változatlan, átlagos üteme v .
→ A felület önmagára merőleges irányban növekszik v sebességgel.



Megjegyzések:

(1) a felület „durvul”
⇒ emiatt lesz hullámos!!

(2) sorfejtés alapján:
ha $\epsilon \ll 1$, akkor $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$

(3) hasonlóan
ha $\varphi \ll 1$, akkor $\tan(\varphi) \approx \partial_x h$

$$\Delta h \approx v \Delta t \sqrt{1 + \tan^2(\varphi)} \approx v \Delta t + \frac{v \Delta t}{2} \tan^2(\varphi) \approx v \Delta t + \frac{v \Delta t}{2} (\partial_x h)^2$$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{v}{2} (\partial_x h)^2$$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{v}{2} (\partial_x h)^2$$

Egyéb effektusok miatt a $\frac{v}{2}$ helyett legyen $\frac{\lambda}{2}$
(így általánosabb lesz az egyenlet)

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{v}{2} (\partial_x h)^2$$

Egyéb effektusok miatt a $\frac{v}{2}$ helyett legyen $\frac{\lambda}{2}$
(így általánosabb lesz az egyenlet)

Az 1d tér helyett legyen 2d tér:

- az x koordináta helyett \vec{r} helyvektor lesz
- a ∂_x parciális derivált helyett $\vec{\nabla}$ operátor lesz

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{v}{2} (\partial_x h)^2$$

Egyéb effektusok miatt a $\frac{v}{2}$ helyett legyen $\frac{\lambda}{2}$
(így általánosabb lesz az egyenlet)

Az 1d tér helyett legyen 2d tér:

- az x koordináta helyett \vec{r} helyvektor lesz
- a ∂_x parciális derivált helyett $\vec{\nabla}$ operátor lesz

A felületet simító tag és a felület (önmagára merőleges irányban történő) növekedését leíró tag összege alapján itt tartunk:

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{\nu}{2} (\partial_x h)^2$$

Egyéb effektusok miatt a $\frac{\nu}{2}$ helyett legyen $\frac{\lambda}{2}$
(így általánosabb lesz az egyenlet)

Az 1d tér helyett legyen 2d tér:

- az x koordináta helyett \vec{r} helyvektor lesz
- a ∂_x parciális derivált helyett $\vec{\nabla}$ operátor lesz

A felületet simító tag és a felület (önmagára merőleges irányban történő) növekedését leíró tag összege alapján itt tartunk:

$$\partial_t h(\vec{r}, t) = \nu \vec{\nabla}^2 h(\vec{r}, t) + v + \frac{\lambda}{2} (\vec{\nabla} h)^2$$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület növekedését leíró tag járuléka kis Δt idő alatt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx v + \frac{\nu}{2} (\partial_x h)^2$$

Egyéb effektusok miatt a $\frac{\nu}{2}$ helyett legyen $\frac{\lambda}{2}$
(így általánosabb lesz az egyenlet)

Az 1d tér helyett legyen 2d tér:

- az x koordináta helyett \vec{r} helyvektor lesz
- a ∂_x parciális derivált helyett $\vec{\nabla}$ operátor lesz

A felületet simító tag és a felület (önmagára merőleges irányban történő) növekedését leíró tag összege alapján itt tartunk:

$$\partial_t h(\vec{r}, t) = \nu \vec{\nabla}^2 h(\vec{r}, t) + v + \frac{\lambda}{2} (\vec{\nabla} h)^2$$

Figyelem!

A ν egy konstans szorzó, nem ugyanaz, mint a v sebesség!

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Végül adjuk hozzá a zaj tagot
(ez a sztochasztikus tag = nem determinisztikus)

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Végül adjuk hozzá a zaj tagot
(ez a sztochasztikus tag = nem determinisztikus)

Időben és térben korrelálatlan zaj: $\eta(\vec{r}, t)$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Végül adjuk hozzá a zaj tagot
(ez a sztochasztikus tag = nem determinisztikus)

Időben és térben korrelálatlan zaj: $\eta(\vec{r}, t)$

Tehát

- a simító tag,
- a felületre merőleges irányú növekedés (\rightarrow ez „hullámosít”)
- és a térben és időben korrelálatlan zaj

összegeként a **KPZ egyenlet**:

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Végül adjuk hozzá a zaj tagot
(ez a sztochasztikus tag = nem determinisztikus)

Időben és térben korrelálatlan zaj: $\eta(\vec{r}, t)$

Tehát

- a simító tag,
- a felületre merőleges irányú növekedés (\rightarrow ez „hullámosít”)
- és a térben és időben korrelálatlan zaj

Összegeként a **KPZ egyenlet**:

$$\partial_t h(\vec{r}, t) = \nu \nabla^2 h(\vec{r}, t) + v + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\vec{r}, t)$$

KPZ modell

A KPZ egyenlet felépítése lépésről lépésre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Végül adjuk hozzá a zaj tagot
(ez a sztochasztikus tag = nem determinisztikus)

Időben és térben korrelálatlan zaj: $\eta(\vec{r}, t)$

Tehát

- a simító tag,
- a felületre merőleges irányú növekedés (\rightarrow ez „hullámosít”)
- és a térben és időben korrelálatlan zaj

összegeként a **KPZ egyenlet**:

$$\partial_t h(\vec{r}, t) = \nu \nabla^2 h(\vec{r}, t) + v + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\vec{r}, t)$$

Megjegyzések:

- korrelálatlan $\eta(\vec{r}, t)$ esetén a KPZ-ből kapott felület **önaffin**
- a KPZ alapján (az Eden-nél is!) a felület durvulási (önaffin) exponense $H = 1/2$, viszont a kísérletekben $H \approx 0.7 \dots 0.8$!
- eltérés oka: KPZ zaj időben korrelálatlan (valóságban korrelált)

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Időben korrelálatlan zaj esetén:

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Időben korrelálatlan zaj esetén:

- ha a zaj az \vec{r} helyen a t időpillanatban $\eta(\vec{r}, t)$,
- akkor ugyanitt a $t + \Delta t$ időpillanatban ettől független a zaj.

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Időben korrelálatlan zaj esetén:

- ha a zaj az \vec{r} helyen a t időpillanatban $\eta(\vec{r}, t)$,
- akkor ugyanitt a $t + \Delta t$ időpillanatban ettől független a zaj.

Másképpen megfogalmazva:

- ha a felület a táptalaj egyenetlensége (pl. bemélyedés) miatt a t időpillanatban az \vec{r} helyen „megakad”,
- akkor ugyanitt a $t + \Delta t$ időpillanatban a táptalaj (közeg) által okozott $\eta(\vec{r}, t + \Delta t)$ zaj az előbbtől független lesz, tehát a felület halad tovább.

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Időben korrelálatlan zaj esetén:

- ha a zaj az \vec{r} helyen a t időpillanatban $\eta(\vec{r}, t)$,
- akkor ugyanitt a $t + \Delta t$ időpillanatban ettől független a zaj.

Másképpen megfogalmazva:

- ha a felület a táptalaj egyenetlensége (pl. bemélyedés) miatt a t időpillanatban az \vec{r} helyen „megakad”,
- akkor ugyanitt a $t + \Delta t$ időpillanatban a táptalaj (közeg) által okozott $\eta(\vec{r}, t + \Delta t)$ zaj az előbbtől független lesz, tehát a felület halad tovább.

Ezzel szemben

- a zaj valóságban gyakran időben konstans
- a felület egy **időben állandó** inhomogén közegben terjed
- szemléletesen megfogalmazva: a zaj „befagy” a közegbe befagyott zaj = quenched noise (szilárdtest-fizikából)

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az időben állandó (rögzített) zaj esetén

- a táptalaj adott helyén mindig az átlagtól azonos az eltérés
- tehát ha egy helyen a felület megakad,
 - akkor ott is maradhat hosszú ideig, megakadhat,
 - hiszen a közeg nem változik

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az időben állandó (rögzített) zaj esetén

- a táptalaj adott helyén mindig az átlagtól azonos az eltérés
- tehát ha egy helyen a felület megakad,
 - akkor ott is maradhat hosszú ideig, megakadhat,
 - hiszen a közeg nem változik

→ Akadozva-ugrálva terjedő felület (a pontok akadályokat jelölnek)

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

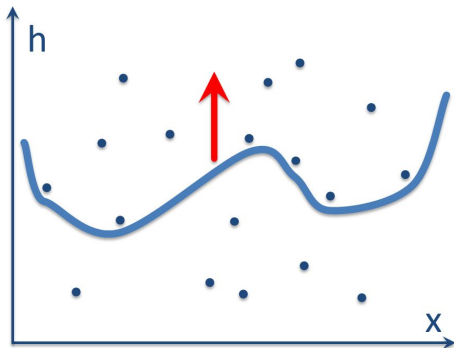
Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az időben állandó (rögzített) zaj esetén

- a táptalaj adott helyén mindig az átlagtól azonos az eltérés
- tehát ha egy helyen a felület megakad,
 - akkor ott is maradhat hosszú ideig, megakadhat,
 - hiszen a közeg nem változik

→ Akadozva-ugrálva terjedő felület (a pontok akadályokat jelölnek)



KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az $\eta(\vec{r}, t)$ befagyott zaj definiálása

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az $\eta(\vec{r}, t)$ befagyott zaj definiálása

Tekintsünk egy ilyen $\Delta(u)$ függvényt (egy „elkent” Dirac-deltát):

- ha u közel van 0-hoz, akkor $\Delta(u) \approx 1$
- és máshol mindenütt $\Delta(u) = 0$.

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az $\eta(\vec{r}, t)$ befagyott zaj definiálása

Tekintsünk egy ilyen $\Delta(u)$ függvényt (egy „elkent” Dirac-deltát):

- ha u közel van 0-hoz, akkor $\Delta(u) \approx 1$
- és máshol mindenütt $\Delta(u) = 0$.

Ezt felhasználva az $\tilde{\eta}$ normált zaj segítségével

$$\eta(\vec{r}, t) := 2D\tilde{\eta}(\vec{r}, h(\vec{r}, t)) ,$$

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az $\eta(\vec{r}, t)$ befagyott zaj definiálása

Tekintsünk egy ilyen $\Delta(u)$ függvényt (egy „elkent” Dirac-deltát):

- ha u közel van 0-hoz, akkor $\Delta(u) \approx 1$
- és máshol mindenütt $\Delta(u) = 0$.

Ezt felhasználva az $\tilde{\eta}$ normált zaj segítségével

$$\eta(\vec{r}, t) := 2D\tilde{\eta}(\vec{r}, h(\vec{r}, t)) ,$$

ahol

- az $\tilde{\eta}$ térbeli részének autokorrelációja $C_{\tilde{\eta}}(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta(|\vec{r}|)\Delta(|\vec{r}'|)$, és
- az $\eta(\vec{r}, t)$ jellemző nagysága $\sqrt{\eta \cdot \eta} = \sqrt{2D}$.

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az $\eta(\vec{r}, t)$ befagyott zaj definiálása

Tekintsünk egy ilyen $\Delta(u)$ függvényt (egy „elkent” Dirac-deltát):

- ha u közel van 0-hoz, akkor $\Delta(u) \approx 1$
- és máshol mindenütt $\Delta(u) = 0$.

Ezt felhasználva az $\tilde{\eta}$ normált zaj segítségével

$$\eta(\vec{r}, t) := 2D\tilde{\eta}(\vec{r}, h(\vec{r}, t)) ,$$

ahol

- az $\tilde{\eta}$ térbeli részének autokorrelációja $C_{\tilde{\eta}}(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta(|\vec{r}|)\Delta(|\vec{r}'|)$, és
- az $\eta(\vec{r}, t)$ jellemző nagysága $\sqrt{\eta \cdot \eta} = \sqrt{2D}$.

Ezt az $\eta(\vec{r}, t)$ zajt helyettesítsük vissza a KPZ-be:

$$\partial_t h(\vec{r}, t) = \nu \vec{\nabla}^2 h(\vec{r}, t) + v + \frac{\lambda}{2} (\vec{\nabla} h)^2 + \eta(\vec{r}, h(\vec{r}, t))$$

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az általánosság elvesztése nélkül (változótranszformációval) a paramétereket ki lehet transzformálni: $\nu = \nu = \lambda = 1$

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az általánosság elvesztése nélkül (változótranszformációval) a paramétereket ki lehet transzformálni: $\nu = \nu = \lambda = 1$

$$\begin{aligned}\partial_t h &= \bar{\nabla}^2 h + 1 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} h)^2 + \eta = \\ &= \bar{\nabla}^2 h + \sqrt{1 + (\bar{\nabla} h)^2} + \eta,\end{aligned}$$

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az általánosság elvesztése nélkül (változótranszformációval) a paramétereket ki lehet transzformálni: $\nu = \nu = \lambda = 1$

$$\begin{aligned}\partial_t h &= \bar{\nabla}^2 h + 1 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} h)^2 + \eta = \\ &= \bar{\nabla}^2 h + \sqrt{1 + (\bar{\nabla} h)^2} + \eta,\end{aligned}$$

ahol az η zaj jellemző nagysága (az η definíciója alapján)

$$\sqrt{\eta \bar{\eta}} = \sqrt{C_{\bar{\eta}}(0,0)} = \sqrt{2D}.$$

KPZ modell

KPZ egyenlet + Befagyott zaj (Quenched noise)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az általánosság elvesztése nélkül (változótranszformációval) a paramétereket ki lehet transzformálni: $\nu = \nu = \lambda = 1$

$$\begin{aligned}\partial_t h &= \bar{\nabla}^2 h + 1 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} h)^2 + \eta = \\ &= \bar{\nabla}^2 h + \sqrt{1 + (\bar{\nabla} h)^2} + \eta,\end{aligned}$$

ahol az η zaj jellemző nagysága (az η definíciója alapján)

$$\sqrt{\eta\bar{\eta}} = \sqrt{C_{\bar{\eta}}(0,0)} = \sqrt{2D}.$$

Kérdések:

- Mekkora zaj esetén tud haladni a felület?
- Milyen $D = D^*$ zaj szint esetén akad meg a felület?

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Példaként használjunk **folytonos tér helyett rácsot** (mezőket): x hely és h magasság folytonos helyett csak diszkrét értékű lehet.

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Példaként használjunk **folytonos tér helyett rácsot** (mezőket): x hely és h magasság folytonos helyett csak diszkrét értékű lehet.

- (1) \forall mezőre $0 < p < 1$ val.séggel tegyünk blokkoló helyet.

Írányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Példaként használjunk **folytonos tér helyett rácsot** (mezőket): x hely és h magasság folytonos helyett csak diszkrét értékű lehet.

- (1) \forall mezőre $0 < p < 1$ val.séggel tegyünk blokkoló helyet.
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől, blokkoló helyeken lépünk.

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Példaként használjunk **folytonos tér helyett rácsot** (mezőket): x hely és h magasság folytonos helyett csak diszkrét értékű lehet.

- (1) \forall mezőre $0 < p < 1$ val.séggel tegyünk blokkoló helyet.
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől, blokkoló helyeken lépünk.
- (2) Léphetünk előre, fel, le, de vissza nem! \rightarrow Irányított perkoláció!

Irányított perkoláció

A folytonos KPZ helyett egy diszkrét modell

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Tekintsünk egy $1d$ (tér) + $1d$ (idő) növekedő felületet:

A növekedő felületet meg tudja állítani sok nagy negatív η -jú hely. Ezeket szokás blokkoló helyeknek nevezni.

Állítások:

- (1) A blokkoló helyek összefüggő láncolatot alkotnak a térben 1 dimenziós minta két széle között.
- (2) Ezen a görbén nincsen túlnövés. Tehát (1) és (2) alapján a blokkoló helyek egy függvényt alkotnak.
- (3) A blokkoló helyek által alkotott függvény önaffin.

Hogyan írhatjuk le a blokkoló helyek láncolatát?

Példaként használjunk **folytonos tér helyett rácsot** (mezőket): x hely és h magasság folytonos helyett csak diszkrét értékű lehet.

- (1) \forall mezőre $0 < p < 1$ val.séggel tegyünk blokkoló helyet.
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől, blokkoló helyeken lépünk.
- (2) Léphetünk előre, fel, le, de vissza nem! \rightarrow Irányított perkoláció!
- (3) Elérjük-e a minta másik szélét? \rightarrow Létezik-e a blokkoló helyeknek irányított perkolációs klasztere?

Irányított perkoláció

Definíció

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

- (1) \forall mező p val.séggel blokkoló (lenti ábrán: szürke)
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől.
- (3) Blokkoló helyeken át mehetünk előre, fel és le. Vissza nem!
- (4) Elérjük-e a minta másik szélét?

Írányított perkoláció

Definíció

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

- (1) \forall mező p val.séggel blokkoló (lenti ábrán: szürke)
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől.
- (3) Blokkoló helyeken át mehetünk előre, fel és le. Vissza nem!
- (4) Elérjük-e a minta másik szélét?

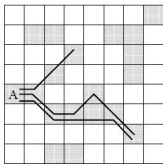


Figure 4.15: Examples of directed percolation clusters leaving site A. Such clusters consist of filled neighbour sites and extend from left to right.

Írányított perkoláció

Definíció

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

- (1) \forall mező p val.séggel blokkoló (lenti ábrán: szürke)
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől.
- (3) Blokkoló helyeken át mehetünk előre, fel és le. Vissza nem!
- (4) Elérjük-e a minta másik szélét?

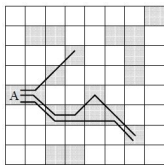


Figure 4.15: Examples of directed percolation clusters leaving site A. Such clusters consist of filled neighbour sites and extend from left to right.

→ A blokkoló helyek láncá egy **írányított perkolációs** klaszter!

Írányított perkoláció

Definíció

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

- (1) \forall mező p val.séggel blokkoló (lenti ábrán: szürke)
- (2) Induljunk el a minta egyik szélétől.
- (3) Blokkoló helyeken át mehetünk előre, fel és le. Vissza nem!
- (4) Elérjük-e a minta másik szélét?

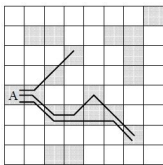


Figure 4.15: Examples of directed percolation clusters leaving site A. Such clusters consist of filled neighbour sites and extend from left to right.

→ A blokkoló helyek láncá egy **írányított perkolációs** klaszter!

Megjegyzés.

A kritikus állapotban (a végtelen nagy klaszter megjelenésekor) az irányított perkolációs klaszternek két karakterisztikus hossza van:

- a kitüntetett iránnyal párhuzamosan: ξ_{\parallel}
- arra merőlegesen: ξ_{\perp}

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

Írányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége
- a D^* helyett p_c kritikus betöltési valószínűség

Írányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége
- a D^* helyett p_c kritikus betöltési valószínűség

A p_c kritikus pont közelében a karakterisztikus hosszak skálázása:

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{\nu_{\parallel}} \quad \text{és} \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}}$$

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége
- a D^* helyett p_c kritikus betöltési valószínűség

A p_c kritikus pont közelében a karakterisztikus hosszak skálázása:

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{\nu_{\parallel}} \quad \text{és} \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}}$$

Numerikus eredmény: $\nu_{\parallel} = 1.733$ és $\nu_{\perp} = 1.097$

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége
- a D^* helyett p_c kritikus betöltési valószínűség

A p_c kritikus pont közelében a karakterisztikus hosszak skálázása:

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{\nu_{\parallel}} \quad \text{és} \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}}$$

$$\text{Numerikus eredmény: } \nu_{\parallel} = 1.733 \quad \text{és} \quad \nu_{\perp} = 1.097$$

A kritikus pontban a felület vastagsága

$$L^H \sim w = \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}} \sim \xi_{\parallel}^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}} \approx L^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}}$$

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A zaj $D = 0$ -ról indított növekedése során akkor érjük el a kritikus $D = D^*$ értéket, amikor megjelenik a rendszer x irányú méretével egyező nagyságú (blokkoló helyekből álló) klaszter,

tehát amikor a felülettel párhuzamos irányban a korrelációs hossz eléri a rendszer L méretét:

$$\xi_{\parallel} \approx L$$

A diszkrét modellben

- a D zaj amplitúdó helyett: blokkoló helyek p valószínűsége
- a D^* helyett p_c kritikus betöltési valószínűség

A p_c kritikus pont közelében a karakterisztikus hosszak skálázása:

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{\nu_{\parallel}} \quad \text{és} \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}}$$

$$\text{Numerikus eredmény: } \nu_{\parallel} = 1.733 \quad \text{és} \quad \nu_{\perp} = 1.097$$

A kritikus pontban a felület vastagsága

$$L^H \sim w = \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{\nu_{\perp}} \sim \xi_{\parallel}^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}} \approx L^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}}$$

Tehát a felület durvaságát leíró kitevő: $H = \nu_{\perp}/\nu_{\parallel} = 0.633$

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az irányított perkolációs modellből (diszkrét modell) numerikusan a felület durvaságát leíró kitevő: $H = \nu_{\perp} / \nu_{\parallel} = 0.633$

Írányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az irányított perkolációs modellből (diszkrét modell) numerikusan a felület durvaságát leíró kitevő: $H = \nu_{\perp} / \nu_{\parallel} = 0.633$

Közelebb van a mérési eredményekhez, mint amit akkor kapunk, ha a KPZ egyenletet időben és térben korrelálatlan zajjal számoljuk.

Irányított perkoláció

Az önaffin felület H exponense

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az irányított perkolációs modellből (diszkrét modell) numerikusan a felület durvaságát leíró kitevő: $H = \nu_{\perp} / \nu_{\parallel} = 0.633$

Közelebb van a mérési eredményekhez, mint amit akkor kapunk, ha a KPZ egyenletet időben és térben korrelálatlan zajjal számoljuk.

A KPZ befagyott zajjal és az irányított perkolációs számolás ugyanazt az eredményt adja.

Instabilitás felületek növekedése során

Mullins-Sekerka instabilitás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mullins, Sekerka: Morphological Stability of a Particle Growing by Diffusion or Heat Flow, J. Appl. Phys. 34:323 (1963) doi 10.1063/1.1702607.

Instabilitás felületek növekedése során

Mullins-Sekerka instabilitás

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mullins, Sekerka: Morphological Stability of a Particle Growing by Diffusion or Heat Flow, J. Appl. Phys. 34:323 (1963) doi 10.1063/1.1702607.

Növekedő felületek durvulását okozó instabilitás:



FIGURE 9.4. The Mullins-Sekerka instability. In the left hand picture equipotential lines are shown. Because they are crowded above the bump, it gets sharper.

L. M. Sander: Introduction to nonlinear physics

Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A növekedés sebességét a tápanyag diffúziója határozza meg

Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagzott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

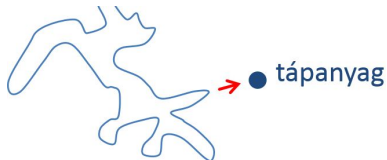
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A növekedés sebességét a tápanyag diffúziója határozza meg

A diffundáló tápanyag felé növekszik a baktériumtelep



Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

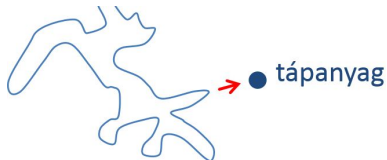
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A növekedés sebességét a tápanyag diffúziója határozza meg

A diffundáló tápanyag felé növekszik a baktériumtelep



Instabilitás: véletlenül vagy egy „tápanyag-csomó” miatt kicsit előrébb kerül a felület → a telepnek ez a része a közelebb kerül több tápanyaghoz → még gyorsabban szaporodik.



Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület kitüremkedésének növekedése:

- kell valamennyi szomszéd,
- ezért csak egy maximális görbületig növekszik, és
- utána beáll egy egyensúlyi alak.

Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A felület kitüremkedésének növekedése:

- kell valamennyi szomszéd,
- ezért csak egy maximális görbületig növekszik, és
- utána beáll egy egyensúlyi alak.

Felületre merőleges növekedés \Rightarrow csúcson gyorsabb növekedés.

Felület növekedése elágazásokkal

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

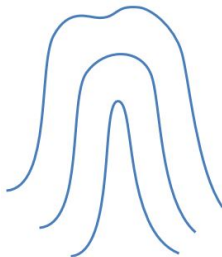
Videók

A felület kitüremkedésének növekedése:

- kell valamennyi szomszéd,
- ezért csak egy maximális görbületig növekszik, és
- utána beáll egy egyensúlyi alak.

Felületre merőleges növekedés \Rightarrow csúcsokon gyorsabb növekedés.

Emiatt könnyen újabb perturbáció \rightarrow oldalág, újabb elágazás



Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell (algorithmus) **definíciója:**

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell (algorithmus) **definíciója:**

Kiindulás:

- mag: 1 részecske áll

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell (algorithmus) **definíciója**:

Kiindulás:

- mag: 1 részecske áll

Frissítés (időlépés):

- végtelen távolról véletlen bolyongó részecske indul
- amikor hozzáér a telephez, akkor ott megáll

Megjegyzés:

- a gyakorlatban elegendő véges távolságból indítani

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell (algorithmus) **definíciója**:

Kiindulás:

- mag: 1 részecske áll

Frissítés (időlépés):

- végtelen távolról véletlen bolyongó részecske indul
- amikor hozzáér a telephez, akkor ott megáll

Megjegyzés:

- a gyakorlatban elegendő véges távolságból indítani

Eredmény:

- fraktál klaszterek
- elágazó baktériumtelephez hasonló alak

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa (részecske szín: érkezés időpontja)

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

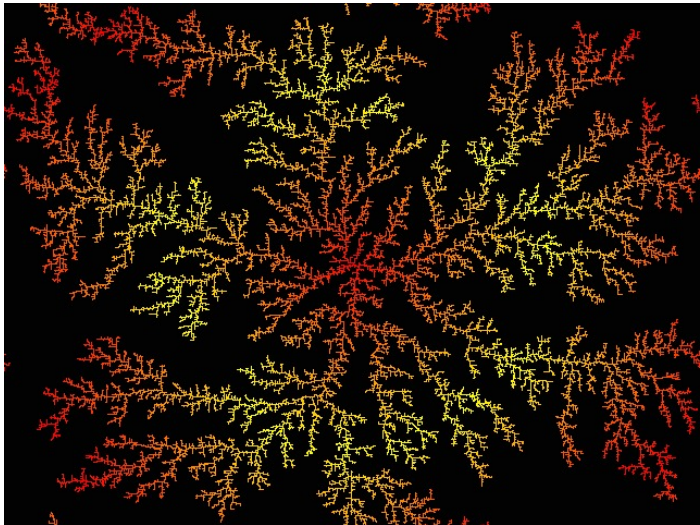
DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa (részecske szín: érkezés időpontja)



Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre – **nem mozognak**

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre – **nem mozognak**

- részecske bolyongása ~ tápanyag mozgása
- részecske odaragad a klaszterre ~ baktérium szaporodik

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre – **nem mozognak**

- részecske bolyongása ~ tápanyag mozgása
- részecske odaragad a klaszterre ~ baktérium szaporodik

Egy erősen egyszerűsített modell:

- 1 db bolyongó tápanyag molekula
- a molekula érkezésekor szaporodás: 1 új baktérium

Már ez is a megfigyelthez hasonló alakot állít elő (← univerzalitás)

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre – **nem mozognak**

- részecske bolyongása ~ tápanyag mozgása
- részecske odaragad a klaszterre ~ baktérium szaporodik

Egy erősen egyszerűsített modell:

- 1 db bolyongó tápanyag molekula
- a molekula érkezésekor szaporodás: 1 új baktérium

Már ez is a megfigyelthez hasonló alakot állít elő (← univerzalitás)

A modell finomítása:

- baktériumok (részecskék) között feltételezünk kölcsönhatást
- \forall részecskéhez x_i hely és E_i sejtciklus állapot (energia)

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre:

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre:

- baktériumok (részecskék) között feltételezünk kölcsönhatást
- \forall részecskéhez x_i hely és E_i sejtciklus állapot (energia)

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre:

- baktériumok (részecskék) között feltételezünk kölcsönhatást
- \forall részecskéhez x_i hely és E_i sejtciklus állapot (energia)
- $E_i < 0$: spóra vagy osztódás utáni állapot
ha nincs táplálék, akkor ebben az állapotban marad
- $E_i > 1$: van elég energiája az osztódáshoz
az osztódási után mindkét sejtnek $0 < E_i < 1$ energiája lesz

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre:

- baktériumok (részecskék) között feltételezünk kölcsönhatást
- \forall részecskéhez x_i hely és E_i sejtciklus állapot (energia)
- $E_i < 0$: spóra vagy osztódás utáni állapot
ha nincs táplálék, akkor ebben az állapotban marad
- $E_i > 1$: van elég energiája az osztódáshoz
az osztódási után mindkét sejtnek $0 < E_i < 1$ energiája lesz

Jelölések:

- ω_j : táplálék felvételi ráta (ebből nyer energiát)
- κ : táplálék \rightarrow energia átalakítási szorzó
- ϵ : „alpműködéshez” szükséges energia időegység alatt

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre:

- baktériumok (részecskék) között feltételezünk kölcsönhatást
- \forall részecskéhez x_i hely és E_i sejtciklus állapot (energia)
- $E_i < 0$: spóra vagy osztódás utáni állapot ha nincs táplálék, akkor ebben az állapotban marad
- $E_i > 1$: van elég energiája az osztódáshoz az osztódási után mindkét sejtnek $0 < E_i < 1$ energiája lesz

Jelölések:

- ω_j : táplálék felvételi ráta (ebből nyer energiát)
- κ : táplálék \rightarrow energia átalakítási szorzó
- ϵ : „alpműködéshez” szükséges energia időegység alatt

Ezekkel kifejezve az i . baktérium energiája:

$$\frac{dE_i}{dt} = \underbrace{\kappa \cdot \omega_j}_{\text{felveszi}} - \underbrace{\epsilon}_{\text{alap "fogyasztás"}}$$

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mekkora maximális rátával növekszik a teljes sejtömeg?

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mekkora maximális rátával növekszik a teljes sejttömeg?

A növekedést korlátozza:

- ω_{\max} : tápanyag felvétel maximális rátája
- κ : a tápanyagot felhasználó enzimatis reakció hatékonysága
- $c(x_i)$: jelenlévő tápanyag mennyisége (helyi koncentrációja)
- ω_0 : tápanyag diffúziós rátája környezetből a baktériumhoz
- $\rho(x_i)$: lokális baktérium sűrűség

A helyi környezetből max. $\omega_0 c$ tömeg rátával jut be a tápanyag.

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mekkora maximális rátával növekszik a teljes sejttömeg?

A növekedést korlátozza:

- ω_{\max} : tápanyag felvétel maximális rátája
- κ : a tápanyagot felhasználó enzimatikus reakció hatékonysága
- $c(x_i)$: jelenlévő tápanyag mennyisége (helyi koncentrációja)
- ω_0 : tápanyag diffúziós rátája környezetből a baktériumhoz
- $\rho(x_i)$: lokális baktérium sűrűség

A helyi környezetből max. $\omega_0 c$ tömeg rátával jut be a tápanyag.

Ezek alapján a sejttömeg növekedési ráta, $\rho(x_i)\omega_i$:

$$\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 c(x_i)] \Rightarrow \omega_i = \min[\omega_{\max}, \omega_0 c(x_i)/\rho(x_i)]$$

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Mekkora maximális rátával növekszik a teljes sejttömeg?

A növekedést korlátozza:

- ω_{\max} : tápanyag felvétel maximális rátája
- κ : a tápanyagot felhasználó enzimatis reakció hatékonysága
- $c(x_i)$: jelenlévő tápanyag mennyisége (helyi koncentrációja)
- ω_0 : tápanyag diffúziós rátája környezetből a baktériumhoz
- $\rho(x_i)$: lokális baktérium sűrűség

A helyi környezetből max. $\omega_0 c$ tömeg rátával jut be a tápanyag.

Ezek alapján a sejttömeg növekedési ráta, $\rho(x_i)\omega_i$:

$$\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 c(x_i)] \Rightarrow \omega_i = \min[\omega_{\max}, \omega_0 c(x_i)/\rho(x_i)]$$

A tápanyagot (fel)használják a baktériumok.

Hogyan változik a tápanyag $c(x, t)$ mennyisége?

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \underbrace{D_0 \cdot \nabla^2 c}_{\text{diffuzio}} - \underbrace{\sum_i \omega_i \delta(x - x_i)}_{\text{nyelok}}$$

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

(1) A sejt energiája: $\frac{dE_i}{dt} = \kappa \cdot \omega_i - \epsilon$ → osztódás $E_i > 1$ -nél

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

(1) A sejt energiája: $\frac{dE_i}{dt} = \kappa \cdot \omega_i - \epsilon$ → osztódás $E_i > 1$ -nél

(2) Sejttömeg növekedése: $\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 C(x_i)]$

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

(1) A sejt energiája: $\frac{dE_i}{dt} = \kappa \cdot \omega_i - \epsilon$ → osztódás $E_i > 1$ -nél

(2) Sejttömeg növekedése: $\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 c(x_i)]$

(3) Tápanyag $c(x, t)$ mennyiségének változása:

- első tag: a tápanyag diffúziója
- második tag (nyelő): a telep az x_i pontban ω_i rátával fogyasztja a tápanyagot

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

(1) A sejt energiája: $\frac{dE_i}{dt} = \kappa \cdot \omega_i - \epsilon$ → osztódás $E_i > 1$ -nél

(2) Sejttömeg növekedése: $\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 c(x_i)]$

(3) Tápanyag $c(x, t)$ mennyiségének változása:

- első tag: a tápanyag diffúziója
- második tag (nyelő): a telep az x_i pontban ω_i rátával fogyasztja a tápanyagot

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_0 \cdot \nabla^2 c - \sum_i \omega_i \delta(x - x_i)$$

Diffusion-Limited Aggregation (DLA)

A DLA modell alkalmazása növekedő baktériumtelepre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Összefoglalás

(1) A sejt energiája: $\frac{dE_i}{dt} = \kappa \cdot \omega_i - \epsilon$ → osztódás $E_i > 1$ -nél

(2) Sejttömeg növekedése: $\rho(x_i)\omega_i = \min[\omega_{\max}\rho(x_i), \omega_0 C(x_i)]$

(3) Tápanyag $c(x, t)$ mennyiségének változása:

- első tag: a tápanyag diffúziója
- második tag (nyelő): a telep az x_i pontban ω_i rátával fogyasztja a tápanyagot

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_0 \cdot \nabla^2 c - \sum_i \omega_i \delta(x - x_i)$$

Eredmény: Az $\omega_{\max} = 1$ választással a numerikus eredmény jól egyezik a kísérletekkel, hasonló alakzatokat ad.

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Maradnak a szabályok (egyenletek)

az előző – mozgas nélküli – DLA típusú modellből:

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Maradnak a szabályok (egyenletek)

az előző – mozgas nélküli – DLA típusú modelltől:

- (1) Sejt energiája és osztódás
- (2) Sejttömeg növekedése
- (3) Tápanyag mennyiségének változása

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Maradnak a szabályok (egyenletek)

az előző – mozgás nélküli – DLA típusú modellből:

- (1) Sejt energiája és osztódás
- (2) Sejttömeg növekedése
- (3) Tápanyag mennyiségének változása

Mi történik **mozgás esetén**? → **További szabályok**

(4) Ha a baktériumok nem mozognak, akkor a felület recés (önaffin) lesz. Ha mozognak, akkor a felület simul.

- Tegyük fel, h. Brown-mozgást végeznek egy határon belül:

$$dx_i/dt = v_0 \vec{e}, \text{ ahol } \vec{e} \text{ véletlen irányú egységvektor}$$

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Maradnak a szabályok (egyenletek)

az előző – mozgás nélküli – DLA típusú modellből:

- (1) Sejt energiája és osztódás
- (2) Sejttömeg növekedése
- (3) Tápanyag mennyiségének változása

Mi történik **mozgás esetén?** → **További szabályok**

(4) Ha a baktériumok nem mozognak, akkor a felület recés (önaffin) lesz. Ha mozognak, akkor a felület simul.

- Tegyük fel, h. Brown-mozgást végeznek egy határon belül:

$$dx_i/dt = v_0 \vec{e}, \text{ ahol } \vec{e} \text{ véletlen irányú egységvektor}$$

(5) A növekedő telep a határvonala előtti területen nyálkásítja, mozgásra alkalmassá teszi a táptalaj felszínét.

- Ha egy a mozgó sejtek a határvonal egy szakaszának N_c -nél többször ütköznek, akkor ott elfoglalják a szomszédos mezőt, tehát a határ előre mozdul.

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa szimulációs eredmény – **mozgó** baktérium telepek

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Példa szimulációs eredmény – mozgó baktérium telepek

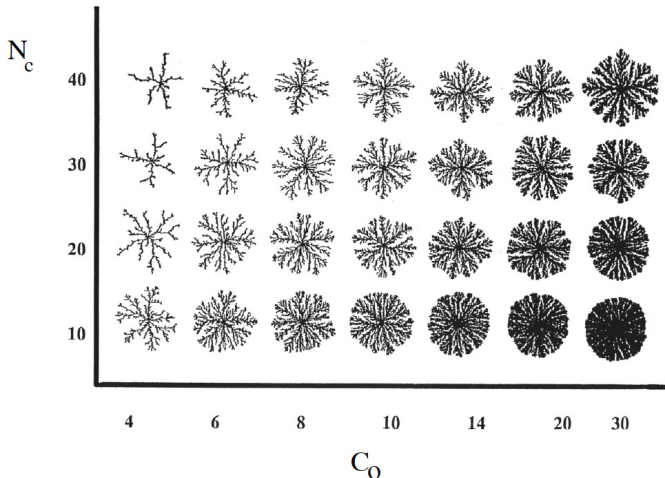


Figure 4.29: Morphology diagram generated by the model with motile bacteria as the function of the initial nutrient concentration and agar gel “hardness”, i.e. the threshold value for the colony borderline displacement. (After [?].)

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az előző oldalon mutatott szimulációs eredmények jól közelítik az agar és a tápanyag koncentráció függvényében kísérletileg kapható alakokat.

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az előző oldalon mutatott szimulációs eredmények jól közelítik az agar és a tápanyag koncentráció függvényében kísérletileg kapható alakokat.

Egy fontos hiányosság: nem írják le a kísérletekben látható fraktál (dendrit-szerű) → nem fraktál („vonalak”) átmenetet.

Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Az előző oldalon mutatott szimulációs eredmények jól közelítik az agar és a tápanyag koncentráció függvényében kísérletileg kapható alakokat.

Egy fontos hiányosság: nem írják le a kísérletekben látható fraktál (dendrit-szerű) \rightarrow nem fraktál („vonalak”) átmenetet.



Mozgó baktériumok

DLA alkalmazása mozgó és növekedő baktériumtelepekre

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

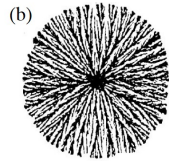
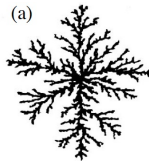
Videók

Az előző oldalon mutatott szimulációs eredmények jól közelítik az agar és a tápanyag koncentráció függvényében kísérletileg kapható alakokat.

Egy fontos hiányosság: nem írják le a kísérletekben látható fraktál (dendrit-szerű) \rightarrow nem fraktál („vonalak”) átmenetet.



Leírható a baktériumok közötti taszító hatással. A taszítás nyomán egymás kikerülése kemotaxissal, azaz: irányított Brown mozgás. Szimulációs eredmény példa:



Királis baktériumtelepek

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Erős sejt-sejt kölcsönhatások esetén lehetséges átmenet

Királis baktériumtelepek

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

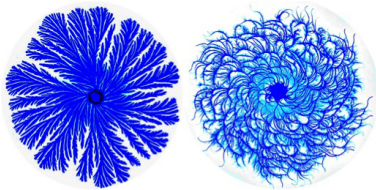
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Erős sejt-sejt kölcsönhatások esetén lehetséges átmenet

Normál helyett → királis telep: minden kar azonos irányban hajlik



Királis baktériumtelepek

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

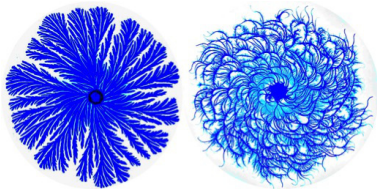
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Erős sejt-sejt kölcsönhatások esetén lehetséges átmenet

Normál helyett → királis telep: minden kar azonos irányban hajlik



A kettő ugyanaz a fajta baktérium,
a különbség csak annyi, hogy más a hosszuk.

Királis baktériumtelepek

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Belagított zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

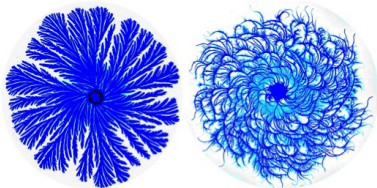
Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

Erős sejt-sejt kölcsönhatások esetén lehetséges átmenet

Normál helyett → királis telep: minden kar azonos irányban hajlik



A kettő ugyanaz a fajta baktérium,
a különbség csak annyi, hogy más a hosszuk.

Mindegyik baktérium

- a propellert forgatva megy előre (szimmetriasértés)
- és a csúcsnál akar előre menni, és lassan fordul.

Mivel a propeller mindig azonos irányban forog (megálláskor és induláskor is), ezért a bacik azonos irányban próbálnak fordulni.

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Eden Growth Model, 2000 time steps

<https://youtu.be/h1uvLTwMF0s>

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Eden Growth Model, 2000 time steps

<https://youtu.be/h1uvLTwMF0s>

Surface growth model, weak diffusion

<https://youtu.be/sQQyvIdW2sc>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz.
Oldalirányú mozgás a felületen (diffúzió): **kicsi**.

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Eden Growth Model, 2000 time steps

<https://youtu.be/h1uvLTwMF0s>

Surface growth model, weak diffusion

<https://youtu.be/sQQyvIdW2sc>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz.
Oldalirányú mozgás a felületen (diffúzió): **kicsi**.

Surface growth model, strong diffusion

<https://youtu.be/xZfFwZYZOJ0>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz.
Oldalirányú mozgás felületen (diffúzió): **nagy**.

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Írányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Eden Growth Model, 2000 time steps

<https://youtu.be/h1uvLTwMFOs>

Surface growth model, weak diffusion

<https://youtu.be/sQQyvIdW2sc>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz. Oldalirányú mozgás a felületen (diffúzió): **kicsi**.

Surface growth model, strong diffusion

<https://youtu.be/xZfFwZYZOJ0>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz. Oldalirányú mozgás felületen (diffúzió): **nagy**.

Diffusion-Limited Aggregation

2d: <https://youtu.be/1zUZjfHNir8>

3d: <https://youtu.be/h3O1LGe-dBw>

Videók a fejezethez

Baktériumtelepek geometriája II.

Bevezetés

Baktériumtelepek felszíne

Növekedő felület modelljei

Eden modell

KPZ modell

Befagyott zaj

Irányított perkoláció

Instabilitás eredete

Elágazó morfológia

DLA

DLA növekedő baktérium telepekre

Mozgó baktériumok

Csavarodó (királis) növekedés

Videók

A tanult egyenletek segítségével hasonlítsuk össze a jelenségeket befolyásoló fizikai hatásokat!

Eden Growth Model, 2000 time steps

<https://youtu.be/h1uvLTwMF0s>

Surface growth model, weak diffusion

<https://youtu.be/sQQyvIdW2sc>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz. Oldalirányú mozgás a felületen (diffúzió): **kicsi**.

Surface growth model, strong diffusion

<https://youtu.be/xZfFwZYZOJ0>

Esés: függőlegesen. Ragadás: alatta v. mellette lévőhöz. Oldalirányú mozgás felületen (diffúzió): **nagy**.

Diffusion-Limited Aggregation

2d: <https://youtu.be/1zUZjfHNir8>

3d: <https://youtu.be/h301LGe-dBw>

Baktériumtelep körkörös mozgása

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Szinkronizáció a biológiában:

Folytonos modellek

Integrál és tüzel modellek

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése

https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsozóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsomóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus
- tücskök összehangolt ciripelése

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsozóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus
- tücskök összehangolt ciripelése
- kabócák szaporodási ciklusa

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsozóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus
- tücskök összehangolt ciripelése
- kabócák szaporodási ciklusa
- emberi fiziológia: lépés, légzés

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsozóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus
- tücskök összehangolt ciripelése
- kabócák szaporodási ciklusa
- emberi fiziológia: lépés, légzés
- vastaps

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Példák:

- idegsejtek tüzelése
https://youtu.be/watch?v=t3TaMU_qXMc
- szentjánosbogarak villogása
<https://youtu.be/watch?v=sROKYelaWbo>
- a szinuszcsozóban található szívizomsejtek összehúzódása
→ szívritmus
- tücskök összehangolt ciripelése
- kabócák szaporodási ciklusa
- emberi fiziológia: lépés, légzés
- vastaps

Közös: oszillátorok csatolódnak nemlineáris kölcsönhatással

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Közös: oszillátorok csatolódnak nemlineáris kölcsönhatással

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtré kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönható
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

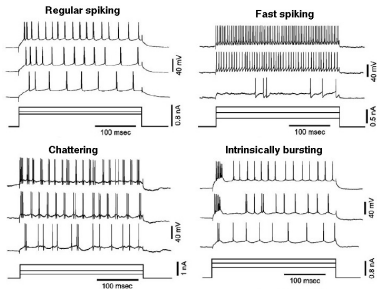
Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Közös: oszcillátorok csatolódnak nemlineáris kölcsönhatással

Kétféle jel fordul elő (ábrán mindkét típusra egy példa):

1, rövid impulzusok (delta-szerű „tüzelés”)



Idegejtek néhány tüzelési típusa (genesis-sim.org)

Szinkronizáció – Példák

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtré kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

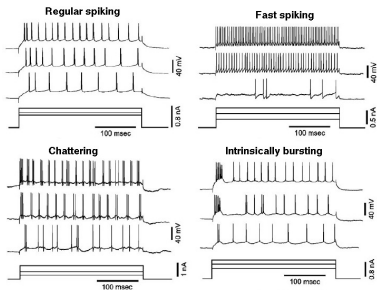
Abszorpció

Sok, periodikusan változó egység (spontán) összehangolódása

Közös: oszillátorok csatolódnak nemlineáris kölcsönhatással

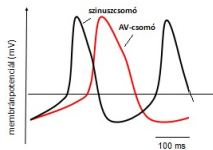
Kétféle jel fordul elő (ábrán mindkét típusra egy példa):

1, rövid impulzusok (delta-szerű „tüzelés”)



Idegejtek néhány tüzelési típusa (genesis-sim.org)

2, folytonos hullámalak



Szinuszcsonló és AV csomó akciós potenciálja

(tankonyvtar.hu)

Kölcsönható oszcillátorok

jelölések, egy oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Kölcsönható részecskék az idő és a részecskék állapota is folytonos

Kölcsönható oszcillátorok

jelölések, egy oszcillátor

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Kölcsönható részecskék

az idő és a részecskék állapota is folytonos

- ϕ_i : az i . oszcilláló részecske fázisa (a ciklusában „hol tart”)
- t : idő
- T_i : az i . részecske egy oszcillációs periodusának ideje
- $\nu_i = 1/T_i$: frekvencia
- $\omega = 2\pi/T_i$: körfrekvencia
- sajátfrekvencia: energia közlés után a magára hagyott rendszer ilyen frekvenciájú rezgést végez (egy rendszernek lehet több sajátfrekvenciája)

Kölcsönható oszcillátorok

jelölések, egy oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Kölcsönható részecskék

az idő és a részecskék állapota is folytonos

- ϕ_i : az i . oszcilláló részecske fázisa (a ciklusában „hol tart”)
- t : idő
- T_i : az i . részecske egy oszcillációs periodusának ideje
- $\nu_i = 1/T_i$: frekvencia
- $\omega = 2\pi/T_i$: körfrekvencia
- sajátfrekvencia: energia közlés után a magára hagyott rendszer ilyen frekvenciájú rezgést végez (egy rendszernek lehet több sajátfrekvenciája)

Egyetlen oszcillátor esetén:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$$

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

$$\text{Egyetlen oszcillátor esetén: } \frac{d\phi_i}{dt} = \omega$$

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Egyetlen oszcillátor esetén: $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$

N darab, páronként kölcsönható oszcillátor:

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Egyetlen oszcillátor esetén: $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$

N darab, páronként kölcsönható oszcillátor:

- **átlagtér közelítés:** bármelyik pár azonos módon hat kölcsön
- $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi)$: csatolás, fáziskülönbségtől függ, 2π -vel periodikus

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Egyetlen oszcillátor esetén: $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$

N darab, páronként kölcsönható oszcillátor:

- **átlagtér közelítés:** bármelyik pár azonos módon hat kölcsön
- $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi)$: csatolás, fáziskülönbségtől függ, 2π -vel periodikus

Tehát az N darab oszcillátor esetén (sajátfrekvencia + kölcsönhatás):

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_{i,j}(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Egyetlen oszcillátor esetén: $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$

N darab, páronként kölcsönható oszcillátor:

- **átlagtér közelítés:** bármelyik pár azonos módon hat kölcsön
- $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi)$: csatolás, fáziskülönbségtől függ, 2π -vel periodikus

Tehát az N darab oszcillátor esetén (sajátfrekvencia + kölcsönhatás):

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_{i,j}(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

A Kuramoto-modell átlagtér változatában: $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi) = \frac{K}{N} \sin(\Delta\phi)$

Kölcsönható oszcillátorok

több oszcillátor, csatolási tag a Kuramoto modell átlagtér változatában

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Egyetlen oszcillátor esetén: $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega$

N darab, páronként kölcsönható oszcillátor:

- **átlagtér közelítés:** bármelyik pár azonos módon hat kölcsön
- $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi)$: csatolás, fáziskülönbségtől függ, 2π -vel periodikus

Tehát az N darab oszcillátor esetén (sajátfrekvencia + kölcsönhatás):

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_{i,j}(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

A Kuramoto-modell átlagtér változatában: $\Gamma_{i,j}(\Delta\phi) = \frac{K}{N} \sin(\Delta\phi)$
ez a csatolás

- $K > 0$ esetén a fáziskülönbséget minimalizálja
- kis $\Delta\phi$ -nél lineárisan nő és később telítésbe megy
- ha $\Delta\phi$ átlépi a $\pi/2$ -t, akkor már csökken (de még pozitív)
- utána a $\pi < \Delta\phi < 2\pi$ tartományon negatív

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

Rendparaméterrel → **Defináljuk a rendparamétert!**

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A **Kuramoto-modellben** (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

Rendparaméterrel → **Defináljuk a rendparamétert!**

Tehát a kérdés: **Hogyan változik a rendparaméter?**

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

Rendparaméterrel → **Defináljuk a rendparamétert!**

Tehát a kérdés: **Hogyan változik a rendparaméter?**

A rendparaméter definíciójához tegyük fel, hogy

- a sajátfrekvenciák egy Gauss szerinti $g(\omega)$ eloszlásúak
- a $g(\omega)$ sűrűségfüggvény várható értéke ω_0 és szórása σ

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

Rendparaméterrel → **Defináljuk a rendparamétert!**

Tehát a kérdés: **Hogyan változik a rendparaméter?**

A rendparaméter definíciójához tegyük fel, hogy

- a sajátfrekvenciák egy Gauss szerinti $g(\omega)$ eloszlásúak
- a $g(\omega)$ sűrűségfüggvény várható értéke ω_0 és szórása σ

$$g(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(\omega_i - \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A Kuramoto-modellben (átlagtér eset) az i . részecske fázisa:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

Acebron et.al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77**:137–185 (2005)

Rendeződnek-e ezek a kölcsönható részecskék?

Hogyan tudjuk mérni a rendeződést?

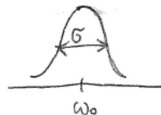
Rendparaméterrel → **Defináljuk a rendparamétert!**

Tehát a kérdés: **Hogyan változik a rendparaméter?**

A rendparaméter definíciójához tegyük fel, hogy

- a sajátfrekvenciák egy Gauss szerinti $g(\omega)$ eloszlásúak
- a $g(\omega)$ sűrűségfüggvény várható értéke ω_0 és szórása σ

$$g(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(\omega_i - \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$



A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Megjegyzés: ha

- a $g(\omega)$ eloszlás végtelen keskeny, azaz $\sigma = 0$ miatt $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$
- és az oszillátorok **nem átlagtérben, hanem 2d rácson** vannak

akkor

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

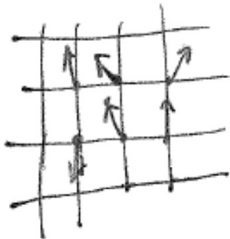
Abszorpció

Megjegyzés: ha

- a $g(\omega)$ eloszlás végtelen keskeny, azaz $\sigma = 0$ miatt $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$
- és az oszcillátorok **nem átlagtérben, hanem 2d rácson** vannak

akkor

a 2d ferromágneses XY-modellt kapjuk:



A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A rendparaméter definíciója érdekében **transzformáljuk** ki a rendszerből az oszillátorok „átlagos” időfejlődését:

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A rendparaméter definíciója érdekében **transzformáljuk** ki a rendszerből az oszcillátorok „átlagos” időfejlődését:

$$\phi_j \rightarrow \tilde{\phi}_j = \phi_j - \omega_0 t$$

$$\omega_j \rightarrow \tilde{\omega}_j = \omega_j - \omega_0$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A rendparaméter definíciója érdekében **transzformáljuk** ki a rendszerből az oszcillátorok „átlagos” időfejlődését:

$$\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$$

$$\omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_0$$

A Kuramoto-modell invariáns a $(\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i, \omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i)$ transzformációra, az egyenlet ugyanúgy néz ki a transzformált változókra:

$$\frac{d\tilde{\phi}_i}{dt} = \tilde{\omega}_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}_i)$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A rendparaméter definíciója érdekében **transzformáljuk** ki a rendszerből az oszcillátorok „átlagos” időfejlődését:

$$\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$$

$$\omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_0$$

A Kuramoto-modell invariáns a $(\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i, \omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i)$ transzformációra, az egyenlet ugyanúgy néz ki a transzformált változókra:

$$\frac{d\tilde{\phi}_i}{dt} = \tilde{\omega}_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}_i)$$

Jelölje a transzformált $\tilde{\phi}_i$ irányú egységvektorok vektori átlagát $\theta(t)$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Polytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Térjünk vissza a Kuramoto-modell átlagtér esetéhez.

A rendparaméter definíciója érdekében **transzformáljuk** ki a rendszerből az oszcillátorok „átlagos” időfejlődését:

$$\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$$

$$\omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_0$$

A Kuramoto-modell invariáns a $(\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_i, \omega_i \rightarrow \tilde{\omega}_i)$ transzformációra, az egyenlet ugyanúgy néz ki a transzformált változókra:

$$\frac{d\tilde{\phi}_i}{dt} = \tilde{\omega}_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}_i)$$

Jelölje a transzformált $\tilde{\phi}_i$ irányú egységvektorok vektori átlagát $\theta(t)$

Ezzel, és az $i = \sqrt{-1}$ jelöléssel a rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

Megjegyzés: $Z(t)$ tényleg a $z(t)$ valós része, azaz $Z = |z|$.

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\varphi}_j(t)}$$

Megjegyzés: $Z(t)$ tényleg a $z(t)$ valós része, azaz $Z = |z|$.

Az így kapott $Z(t)$ rendparaméter azt mutatja, hogy a fázisok által definiált egységvektorok egymáshoz közel vannak-e:

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

Megjegyzés: $Z(t)$ tényleg a $z(t)$ valós része, azaz $Z = |z|$.

Az így kapott $Z(t)$ rendparaméter azt mutatja, hogy a fázisok által definiált egységvektorok egymáshoz közel vannak-e:

→ $Z \approx 1$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok közel egyenlőek

→ $Z \approx 0$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok véletlenszerűek

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

Megjegyzés: $Z(t)$ tényleg a $z(t)$ valós része, azaz $Z = |z|$.

Az így kapott $Z(t)$ rendparaméter azt mutatja, hogy a fázisok által definiált egységvektorok egymáshoz közel vannak-e:

→ $Z \approx 1$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok közel egyenlőek

→ $Z \approx 0$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok véletlenszerűek

Állítás: a mozgásegyenlet és a rendparaméter definíciója alapján

$$\frac{d\tilde{\phi}_i(t)}{dt} = \tilde{\omega}_i + K Z \sin[\theta(t) - \tilde{\phi}_i(t)]$$

A szinkronizáció Kuramoto-modellje (átlagtér)

a rendparaméter definíciója

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A rendparaméter definíciója:

$$\underbrace{z(t)}_{\text{komplex rendp.}} := \underbrace{Z(t)}_{\text{valos rendp.}} e^{i\theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\tilde{\phi}_j(t)}$$

Megjegyzés: $Z(t)$ tényleg a $z(t)$ valós része, azaz $Z = |z|$.

Az így kapott $Z(t)$ rendparaméter azt mutatja, hogy a fázisok által definiált egységvektorok egymáshoz közel vannak-e:

→ $Z \approx 1$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok közel egyenlőek

→ $Z \approx 0$, ha a $\tilde{\phi}_i$ fázisok véletlenszerűek

Állítás: a mozgásegyenlet és a rendparaméter definíciója alapján

$$\frac{d\tilde{\phi}_i(t)}{dt} = \tilde{\omega}_i + K Z \sin[\theta(t) - \tilde{\phi}_i(t)]$$

Ez az egyenlet matematikailag úgy néz ki, mint egy

- nem kölcsönható rendszer,
- és egy nagy oszcillátor (Ω, Z, θ_0 const.): $z(t) = Z e^{i(\Omega t + \theta_0)}$

Kuramoto-modell (átlagtér)

bifurkáció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

**Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás**

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Kuramoto: ebben a rendszerben van (Hopf-)bifurkáció, azaz

Kuramoto-modell (átlagtér)

bifurkáció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Kuramoto: ebben a rendszerben van (Hopf-)bifurkáció, azaz

\exists egy $0 < K_c < \infty$ kritikus kölcsönhatás erősség, amire

- $K < K_c$ esetén az egyensúly $Z = 0$
- és a $\beta := -\frac{1}{16} \pi K_c^3 g''(0)$ definícióval
- kis $\epsilon := (K - K_c)/K_c$ esetén $z = e^{i\theta} \sqrt{\epsilon/\beta}$, ahol θ tetsz. konst.



Kuramoto-modell (átlagtér)

bifurkáció

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatorit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Kuramoto: ebben a rendszerben van (Hopf-)bifurkáció, azaz

\exists egy $0 < K_c < \infty$ kritikus kölcsönhatás erősség, amire

- $K < K_c$ esetén az egyensúly $Z = 0$
- és a $\beta := -\frac{1}{16} \pi K_c^3 g''(0)$ definícióval
- kis $\epsilon := (K - K_c)/K_c$ esetén $z = e^{i\theta} \sqrt{\epsilon/\beta}$, ahol θ tetsz. konst.



Ha a sajátfrekvenciák $g(\omega)$ eloszlása Gauss,

- akkor $K_{c,Gauss} = \sigma \sqrt{8/\pi}$,
- tehát azonos sajátfrekvenciák ($\sigma = 0$) esetén $K_c = 0$.

Kuramoto-modell (átlagtér)

szimulációs eredmények – példa

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

**Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás**

Csatolt oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

$Z(t)$ valós rendparaméter, $N = 200$ csatolt oszillátor, $\sigma = 1$
Csatolási erősség: $K = 2.5$ (fent), 0.5 (középső), 0 (alsó görbe)

Kuramoto-modell (átlagtér)

szimulációs eredmények – példa

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

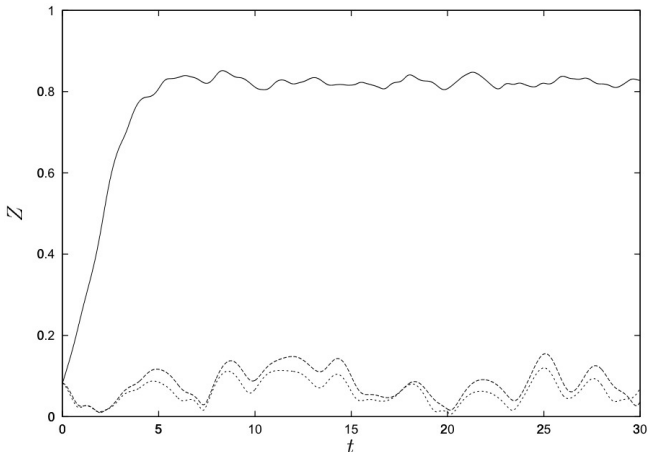
Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

$Z(t)$ valós rendparaméter, $N = 200$ csatolt oszillátor, $\sigma = 1$
Csatolási erősség: $K = 2.5$ (fent), 0.5 (középső), 0 (alsó görbe)



Kuramoto-modell (átlagtér)

szimulációs eredmények – példa

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

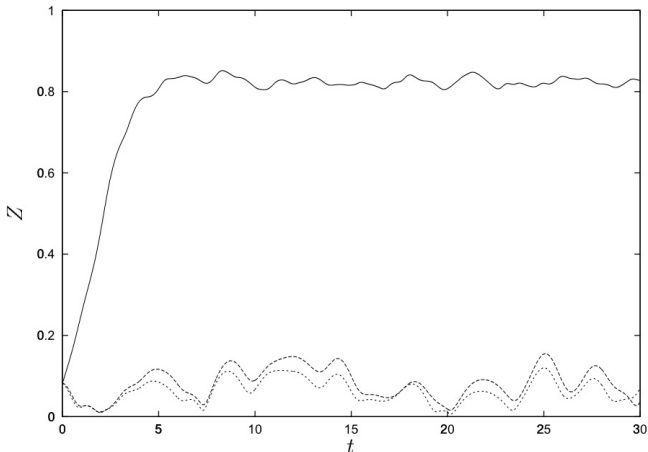
Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

$Z(t)$ valós rendparaméter, $N = 200$ csatolt oszcillátor, $\sigma = 1$
Csatolási erősség: $K = 2.5$ (fent), 0.5 (középső), 0 (alsó görbe)



→ gyenge ($K = 0.5$) és nulla csatolás kb azonos eredményt ad

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

**Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.**

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Realisztikusabb kölcsönhatás: nem átlagtér, hanem **távolságfüggő**

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Realisztikusabb kölcsönhatás: nem átlagtér, hanem **távolságfüggő**

Legyen

- minden oszcillátor egy rács pontjaiban,
- $r_{i,j}$ az $i.$ és $j.$ oszcillátor távolsága,
- η normálási együttható,
- és α a távolságfüggés erősségét szabályozó kitevő.

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Realisztikusabb kölcsönhatás: nem átlagtér, hanem **távolságfüggő**

Legyen

- minden oszcillátor egy rács pontjaiban,
- $r_{i,j}$ az $i.$ és $j.$ oszcillátor távolsága,
- η normálási együttható,
- és α a távolságfüggés erősségét szabályozó kitevő.

Legyen az oszcillátorok fázisainak időfejlődése

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{\eta} \sum_{j \neq i} \frac{\sin(\phi_j - \phi_i)}{r_{i,j}^\alpha}$$

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Realisztikusabb kölcsönhatás: nem átlagtér, hanem **távolságfüggő**

Legyen

- minden oszcillátor egy rács pontjaiban,
- $r_{i,j}$ az $i.$ és $j.$ oszcillátor távolsága,
- η normálási együttható,
- és α a távolságfüggés erősségét szabályozó kitevő.

Legyen az oszcillátorok fázisainak időfejlődése

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{\eta} \sum_{j \neq i} \frac{\sin(\phi_j - \phi_i)}{r_{i,j}^\alpha}$$

→ analitikusan nem kezelhető!

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Realisztikusabb kölcsönhatás: nem átlagtér, hanem **távolságfüggő**

Legyen

- minden oszcillátor egy rács pontjaiban,
- $r_{i,j}$ az $i.$ és $j.$ oszcillátor távolsága,
- η normálási együttható,
- és α a távolságfüggés erősségét szabályozó kitevő.

Legyen az oszcillátorok fázisainak időfejlődése

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{\eta} \sum_{j \neq i} \frac{\sin(\phi_j - \phi_i)}{r_{i,j}^\alpha}$$

→ analitikusan nem kezelhető!

Az α exponenstól való függés:

- $\alpha = 0$: nincsen távolságfüggés, átlagtér közelítést visszaadja
- $\alpha \rightarrow \infty$: a kölcsönh. gyorsan lecseng, csak 1. szomszéd kh.

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció
a biológiában

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

**Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.**

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

- Ha $\alpha \geq d$, akkor a csatolási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N r_{i,j}^{-\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N r_{i,j}^{-\alpha}}_{\text{ehhez kell az } \alpha \geq d} < \infty$$

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

- Ha $\alpha \geq d$, akkor a csatolási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha}}_{\text{ehhez kell az } \alpha \geq d} < \infty$$

- Ha $\alpha \leq d$, akkor
 - ω_i -től függően nagy N -re divergálhat a csatolási tag
 - tehát $N \rightarrow \infty$ esetén $\forall K > 0$ értéknél szinkronizáció van

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

- Ha $\alpha \geq d$, akkor a csatolási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha}}_{\text{ehhez kell az } \alpha \geq d} < \infty$$

- Ha $\alpha \leq d$, akkor
 - ω_i -től függően nagy N -re divergálhat a csatolási tag
 - tehát $N \rightarrow \infty$ esetén $\forall K > 0$ értéknél szinkronizáció van

A rendszer „befagy” 1d-ben $\alpha \lesssim 1$ esetén, 2d-ben $\alpha \lesssim 2$ esetén:

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtré kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

- Ha $\alpha \geq d$, akkor a csatolási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha}}_{\text{ehhez kell az } \alpha \geq d} < \infty$$

- Ha $\alpha \leq d$, akkor
 - ω_i -től függően nagy N -re divergálhat a csatolási tag
 - tehát $N \rightarrow \infty$ esetén $\forall K > 0$ értéknél szinkronizáció van

A rendszer „befagy” 1d-ben $\alpha \lesssim 1$ esetén, 2d-ben $\alpha \lesssim 2$ esetén:

ez a folytonos fázisátalakuláshoz hasonló jelenség, de a kontroll paraméter itt egy kitevő (az α)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow 0^+} Z(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } \alpha \leq d \\ 0 & , \text{ ha } \alpha > d \end{cases}$$

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kölcsönh.

A K csatolási erősség és az α csatolási kitevő hatása

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Fizikai esetben általában $\alpha = d - 1$

- Ha $\alpha \geq d$, akkor a csatolási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N r_{i,j}^{-\alpha}}_{\text{ehhez kell az } \alpha \geq d} < \infty$$

- Ha $\alpha \leq d$, akkor
 - ω_i -től függően nagy N -re divergálhat a csatolási tag
 - tehát $N \rightarrow \infty$ esetén $\forall K > 0$ értéknél szinkronizáció van

A rendszer „befagy” 1d-ben $\alpha \lesssim 1$ esetén, 2d-ben $\alpha \lesssim 2$ esetén:

ez a folytonos fázisátalakuláshoz hasonló jelenség, de a kontroll paraméter itt egy kitevő (az α)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow 0^+} Z(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } \alpha \leq d \\ 0 & , \text{ ha } \alpha > d \end{cases}$$

A szinkronizáció gyorsabb lehet, mint a Kuramoto+átlagtér esetben.

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció
a biológiában

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

- a gyorsan változó (általában mikroszkopikus) szabadsági fokokat együtt tekintünk „zajnak”
- az ezekhez képest **lassan változó** (általában makroszkopikus) **néhány szabadsági fok**ról szól a Langevin egyenlet

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

- a gyorsan változó (általában mikroszkopikus) szabadsági fokokat együtt tekintünk „zajnak”
- az ezekhez képest **lassan változó** (általában makroszkopikus) **néhány szabadsági fok**ról szól a Langevin egyenlet

Példa: Brown mozgás
$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \lambda \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\xi}(t),$$

ahol a zaj autokorrelációja $\langle \vec{\xi}_i(t) \vec{\xi}_j(t') \rangle = 2 \lambda k_B T \delta_{i,j} \delta(t - t')$

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

- a gyorsan változó (általában mikroszkopikus) szabadsági fokokat együtt tekintünk „zajnak”
- az ezekhez képest **lassan változó** (általában makroszkopikus) **néhány szabadsági fok**ról szól a Langevin egyenlet

Példa: Brown mozgás
$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \lambda \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\xi}(t),$$

ahol a zaj autokorrelációja $\langle \vec{\xi}_i(t) \vec{\xi}_j(t') \rangle = 2 \lambda k_B T \delta_{i,j} \delta(t - t')$

Fokker-Planck egyenlet (Adriaan Fokker 1914, Max Planck 1917):

- részecske mozog, van súrlódás (lineáris) és zaj (sztoch. tag)
- a részecske sebességének (vagy helyének) **valószínűség-sűrűsége** hogyan változik időben?

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

- a gyorsan változó (általában mikroszkopikus) szabadsági fokokat együtt tekintünk „zajnak”
- az ezekhez képest **lassan változó** (általában makroszkopikus) **néhány szabadsági fok**ról szól a Langevin egyenlet

Példa: Brown mozgás
$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \lambda \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\xi}(t),$$

ahol a zaj autokorrelációja $\langle \vec{\xi}_i(t) \vec{\xi}_j(t') \rangle = 2 \lambda k_B T \delta_{i,j} \delta(t - t')$

Fokker-Planck egyenlet (Adriaan Fokker 1914, Max Planck 1917):

- részecske mozog, van súrlódás (lineáris) és zaj (sztoch. tag)
- a részecske sebességének (vagy helyének) **valószínűség-sűrűsége** hogyan változik időben?

Példa: Diffúziós egyenlet
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}$$

Két sztochasztikus diff.egyenlet típus dióhéjban

Langevin egyenlet, Fokker-Planck egyenlet

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Langevin egyenlet (Paul Langevin 1908):

- a gyorsan változó (általában mikroszkopikus) szabadsági fokokat együtt tekintünk „zajnak”
- az ezekhez képest **lassan változó** (általában makroszkopikus) **néhány szabadsági fok**ról szól a Langevin egyenlet

Példa: Brown mozgás
$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \lambda \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{\xi}(t),$$

ahol a zaj autokorrelációja $\langle \vec{\xi}_i(t) \vec{\xi}_j(t') \rangle = 2 \lambda k_B T \delta_{i,j} \delta(t - t')$

Fokker-Planck egyenlet (Adriaan Fokker 1914, Max Planck 1917):

- részecske mozog, van súrlódás (lineáris) és zaj (sztoch. tag)
- a részecske sebességének (vagy helyének) **valószínűség-sűrűsége** hogyan változik időben?

Példa: Diffúziós egyenlet
$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow p(x, t) = e^{-x^2/(2t)} / \sqrt{2\pi t}$$

Zajos oszcillátorok

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A valódi oszcillátorok időfejlődése zajos lehet:

- belső zaj (hatások kiértékelése, belső döntések)
- külső zaj (a többi oszcillátor vagy a közeg eltérései)

A kettőt összesítve egy zaj tagba írjuk: ξ .

Zajos oszcillátorok

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A valódi oszcillátorok időfejlődése zajos lehet:

- belső zaj (hatások kiértékelése, belső döntések)
- külső zaj (a többi oszcillátor vagy a közeg eltérései)

A kettőt összesítve egy zaj tagba írjuk: ξ .

Tegyük fel, hogy minden oszcillátor sajátfrekvenciája ω_0

és az i . oszcillátornál megjelenő $\xi_i(t)$ zaj

- időben korrelálatlan és

- független a többi oszcillátor zaj tagjától

Zajos oszcillátorok

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A valódi oszcillátorok időfejlődése zajos lehet:

- belső zaj (hatások kiértékelése, belső döntések)
- külső zaj (a többi oszcillátor vagy a közeg eltérései)

A kettőt összesítve egy zaj tagba írjuk: ξ .

Tegyük fel, hogy minden oszcillátor sajátfrekvenciája ω_0

és az i . oszcillátornál megjelenő $\xi_i(t)$ zaj

- időben korrelálatlan és

- független a többi oszcillátor zaj tagjától

\Rightarrow minden oszcillátorra azonos a transzformáció: $\psi_i := \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$

Zajos oszcillátorok

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Polytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A valódi oszcillátorok időfejlődése zajos lehet:

- belső zaj (hatások kiértékelése, belső döntések)
- külső zaj (a többi oszcillátor vagy a közeg eltérései)

A kettőt összesítve egy zaj tagba írjuk: ξ .

Tegyük fel, hogy minden oszcillátor sajátfrekvenciája ω_0 és az i . oszcillátornál megjelenő $\xi_i(t)$ zaj

- időben korrelálatlan és

- független a többi oszcillátor zaj tagjától

\Rightarrow minden oszcillátorra azonos a transzformáció: $\psi_i := \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$ és azonos a transzformált fázis időfejlődési egyenlete

($i = 0 \dots N - 1$):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{K}{N} \sum_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{N-1} \sin(\psi_j - \psi_i) + \xi_i(t) \quad (\text{csatolt Langevin-egyenletek}) ,$$

Zajos oszcillátorok

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Polytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagter kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A valódi oszcillátorok időfejlődése zajos lehet:

- belső zaj (hatások kiértékelése, belső döntések)
- külső zaj (a többi oszcillátor vagy a közeg eltérései)

A kettőt összesítve egy zaj tagba írjuk: ξ .

Tegyük fel, hogy minden oszcillátor sajátfrekvenciája ω_0

és az i . oszcillátornál megjelenő $\xi_i(t)$ zaj

- időben korrelálatlan és

- független a többi oszcillátor zaj tagjától

\Rightarrow minden oszcillátorra azonos a transzformáció: $\psi_i := \tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega_0 t$
és azonos a transzformált fázis időfejlődési egyenlete

($i = 0 \dots N-1$):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{K}{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \sin(\psi_j - \psi_i) + \xi_i(t) \quad (\text{csatolt Langevin-egyenletek}) ,$$

ahol a $\xi_i(t)$ fehér zaj tag autokorrelációja:

$$\langle \xi_i(t) \rangle_t = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle_t = 2 \sigma^2 \delta_{i,j} \delta(t - t')$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

$$\text{A rendparaméter } Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

A rendparaméter $Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$

Ezzel $\frac{d\psi_i}{dt} = K [-X \sin \psi_i + Y \cos \psi_i] + \xi_i(t)$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

$$\text{A rendparaméter } Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$$

$$\text{Ezzel } \frac{d\psi_i}{dt} = K [-X \sin \psi_i + Y \cos \psi_i] + \xi_i(t)$$

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy
 $Z(t)$ lassan változik a zajhoz képest

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

$$\text{A rendparaméter } Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$$

$$\text{Ezzel } \frac{d\psi_i}{dt} = K [-X \sin \psi_i + Y \cos \psi_i] + \xi_i(t)$$

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy
 $Z(t)$ lassan változik a zajhoz képest

Rövid kitérő:

- Hogyan hasonlítsuk össze a rendparaméter és a zaj változási sebességét?

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

A rendparaméter $Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$

Ezzel $\frac{d\psi_i}{dt} = K [-X \sin \psi_i + Y \cos \psi_i] + \xi_i(t)$

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy
 $Z(t)$ lassan változik a zajhoz képest

Rövid kitérő:

- Hogyan hasonlítsuk össze a rendparaméter és a zaj változási sebességét?
- Mekkora a fehér zaj jellemző változása egy t méretű időablakban?

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagter kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Erős kölcsönhatás \Rightarrow szinkronizálódhat a rendszer
Nagy zaj \Rightarrow „szétfolyik”, nincsen szinkronizáció

$$\text{A rendparaméter } Z(t) = X(t) + i Y(t) = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\psi_j}$$

$$\text{Ezzel } \frac{d\psi_i}{dt} = K [-X \sin \psi_i + Y \cos \psi_i] + \xi_i(t)$$

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy
 $Z(t)$ lassan változik a zajhoz képest

Rövid kitérő:

- Hogyan hasonlítsuk össze a rendparaméter és a zaj változási sebességét?
- Mekkora a fehér zaj jellemző változása egy t méretű időablakban?

\rightarrow a fehér zaj önaffin-e és ha igen, mekkora a H exponense?

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Az $N \rightarrow \infty$ határesetben az i -vel indexelt $\psi_i(t)$ fázis helyett:

- $P(\psi, t)$ eloszlásfüggvény minden t pillanatban
- jelentése: az oszcillátorok $P(\psi, t)d\psi$ része van a $(\psi, \psi + d\psi)$ fázis tartományban

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Az $N \rightarrow \infty$ határesetben az i -vel indexelt $\psi_i(t)$ fázis helyett:

- $P(\psi, t)$ eloszlásfüggvény minden t pillanatban
- jelentése: az oszcillátorok $P(\psi, t)d\psi$ része van a $(\psi, \psi + d\psi)$ fázis tartományban

Ezt a **rendparamétert** keressük az $N \rightarrow \infty$ határesetben:

$$Z(t) = \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\psi} P(\psi, t)$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Az $N \rightarrow \infty$ határesetben az i -vel indexelt $\psi_i(t)$ fázis helyett:

- $P(\psi, t)$ eloszlásfüggvény minden t pillanatban
- jelentése: az oszcillátorok $P(\psi, t)d\psi$ része van a $(\psi, \psi + d\psi)$ fázis tartományban

Ezt a **rendparamétert** keressük az $N \rightarrow \infty$ határesetben:

$$Z(t) = \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\psi} P(\psi, t)$$

Fokker-Planck egyenlet a ψ fázis $P(\psi, t)$ valószínűség-sűrűségére:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(X \sin \psi - Y \cos \psi) P \right] + \underbrace{\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}}_{\text{diffuzio}}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Polytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Az $N \rightarrow \infty$ határesetben az i -vel indexelt $\psi_i(t)$ fázis helyett:

- $P(\psi, t)$ eloszlásfüggvény minden t pillanatban
- jelentése: az oszcillátorok $P(\psi, t)d\psi$ része van a $(\psi, \psi + d\psi)$ fázis tartományban

Ezt a **rendparamétert** keressük az $N \rightarrow \infty$ határesetben:

$$Z(t) = \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\psi} P(\psi, t)$$

Fokker-Planck egyenlet a ψ fázis $P(\psi, t)$ valószínűség-sűrűségére:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(X \sin \psi - Y \cos \psi) P \right] + \underbrace{\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}}_{\text{diffúzió}}$$

A megoldás érdekében írjuk fel a $P(\psi, t)$ függvény Fourier-sorát:

$$P(\psi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell} P_{\ell}(t) e^{i\ell\psi}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Legyen $Z = X = i Y = P_1^* = P_{-1}$ az első módus és $P_0 = 1$

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Legyen $Z = X = i Y = P_1^* = P_{-1}$ az első módus és $P_0 = 1$

Ha visszaírjuk a Fourier-sort a Fokker-Planck egyenletbe,
akkor egy diff.egyenlet rendszert kapunk ($\ell = 1, 2, \dots$):

$$\frac{dP_\ell}{dt} = -\sigma^2 \ell^2 P_\ell + \frac{\ell K (P_{\ell-1} P_1 - P_{\ell+1} P_1^*)}{2}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Legyen $Z = X = i Y = P_1^* = P_{-1}$ az első módus és $P_0 = 1$

Ha visszaírjuk a Fourier-sort a Fokker-Planck egyenletbe,
akkor egy diff.egyenlet rendszert kapunk ($\ell = 1, 2, \dots$):

$$\frac{dP_\ell}{dt} = -\sigma^2 \ell^2 P_\ell + \frac{\ell K (P_{\ell-1} P_1 - P_{\ell+1} P_1^*)}{2}$$

Az egyenletrendszer első három egyenlete ($\ell = 1, 2, 3$):

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{K}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = K (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4 \sigma^2 P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{3K}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9 \sigma^2 P_3$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Legyen $Z = X = i Y = P_1^* = P_{-1}$ az első módus és $P_0 = 1$

Ha visszaírjuk a Fourier-sort a Fokker-Planck egyenletbe,
akkor egy diff.egyenlet rendszert kapunk ($\ell = 1, 2, \dots$):

$$\frac{dP_\ell}{dt} = -\sigma^2 \ell^2 P_\ell + \frac{\ell K (P_{\ell-1} P_1 - P_{\ell+1} P_1^*)}{2}$$

Az egyenletrendszer első három egyenlete ($\ell = 1, 2, 3$):

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{K}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = K (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4 \sigma^2 P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{3K}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9 \sigma^2 P_3$$

Ennek homogén megoldása: $P_0 = 1$ és \forall más $P_j = 0$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Legyen $Z = X = i Y = P_1^* = P_{-1}$ az első módus és $P_0 = 1$

Ha visszaírjuk a Fourier-sort a Fokker-Planck egyenletbe,
akkor egy diff.egyenlet rendszert kapunk ($\ell = 1, 2, \dots$):

$$\frac{dP_\ell}{dt} = -\sigma^2 \ell^2 P_\ell + \frac{\ell K (P_{\ell-1} P_1 - P_{\ell+1} P_1^*)}{2}$$

Az egyenletrendszer első három egyenlete ($\ell = 1, 2, 3$):

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{K}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = K (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4 \sigma^2 P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{3K}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9 \sigma^2 P_3$$

Ennek homogén megoldása: $P_0 = 1$ és \forall más $P_i = 0$
aminek a fizikai jelentése: $P(\psi, t) = \text{const.}$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Lineáris stabilitás vizsgálat:

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Lineáris stabilitás vizsgálat:

$$\text{a } P(\psi, t) = \text{const.} \text{ megoldás } \begin{cases} \text{stabil, ha } & K < 2\sigma^2 \\ \text{instabil, ha } & K > 2\sigma^2 \end{cases}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Lineáris stabilitás vizsgálat:

$$\begin{aligned} & \text{a } P(\psi, t) = \text{const.} \text{ megoldás} \quad \begin{cases} \text{stabil, ha} & K < 2\sigma^2 \\ \text{instabil, ha} & K > 2\sigma^2 \end{cases} \\ \Rightarrow & \text{a kritikus csatolás } K_c = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Lineáris stabilitás vizsgálat:

$$\text{a } P(\psi, t) = \text{const.} \text{ megoldás } \begin{cases} \text{stabil, ha } & K < 2\sigma^2 \\ \text{instabil, ha } & K > 2\sigma^2 \end{cases}$$

\Rightarrow a kritikus csatolás $K_c = 2\sigma^2$

Az átmenet közelében ($K \approx K_c = 2\sigma^2$):

- az $\ell = 2$ -es egyenletből: $|P_2| \sim |P_1|$
- $|P_3| \sim |P_1|^3$
- $P_2 \approx 0$ és $P_3 \approx 0$

Zajos oszcillátorok

a mozgásegyenletek megoldása analitikusan

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Lineáris stabilitás vizsgálat:

$$\text{a } P(\psi, t) = \text{const.} \text{ megoldás } \begin{cases} \text{stabil, ha } & K < 2\sigma^2 \\ \text{instabil, ha } & K > 2\sigma^2 \end{cases}$$

\Rightarrow a kritikus csatolás $K_c = 2\sigma^2$

Az átmenet közelében ($K \approx K_c = 2\sigma^2$):

- az $\ell = 2$ -es egyenletből: $|P_2| \sim |P_1|$
- $|P_3| \sim |P_1|^3$
- $P_2 \approx 0$ és $P_3 \approx 0$

Ezek alapján P_2 lassan változik, P_1 -en keresztül kifejezhető, emiatt:

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{K^2}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{K^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z$$

Zajos oszcillátorok

a rendparaméter a stacionárius állapotban: Hopf-bifurkáció

Szinkronizáció
a biológiában

Összefoglalva:

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Zajos oszcillátorok

a rendparaméter a stacionárius állapotban: Hopf-bifurkáció

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Összefoglalva:

A rendparaméterre kaptunk egy diff.egyenletet:

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{K^2}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{K^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z,$$

Zajos oszcillátorok

a rendparaméter a stacionárius állapotban: Hopf-bifurkáció

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Összefoglalva:

A rendparaméterre kaptunk egy diff.egyenletet:

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{K^2}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{K^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z,$$

aminek a stacionárius megoldása (Hopf-)bifurkációt tartalmaz:

$$|Z|^2 = \begin{cases} (K^2 - 2\sigma^2) \frac{4\sigma^2}{K^2} & , \text{ ha } K > K_c \\ 0 & , \text{ ha } K < K_c \end{cases}$$

Zajos oszcillátorok

a rendparaméter a stacionárius állapotban: Hopf-bifurkáció

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Összefoglalva:

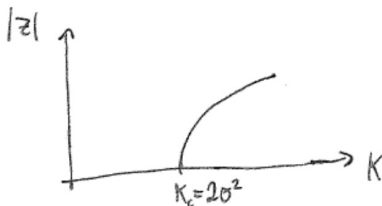
A rendparaméterre kaptunk egy diff.egyenletet:

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{K^2}{2} - \sigma^2 \right) Z - \frac{K^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z,$$

aminek a stacionárius megoldása (Hopf-)bifurkációt tartalmaz:

$$|Z|^2 = \begin{cases} (K^2 - 2\sigma^2) \frac{4\sigma^2}{K^2} & , \text{ ha } K > K_c \\ 0 & , \text{ ha } K < K_c \end{cases}$$

tehát a $K > K_c = 2\sigma^2$ tartományon $|Z| \sim \sqrt{K - K_c}$



Integrál és tüzel modellek

modell definíció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A természetben / társadalmakban gyakori az, hogy egy periodikus (ismétlődő) folyamatban

- hosszú ideig semmi látványos nem történik („integrate”)
- a ciklus egy helyén valami rövid látványos esemény („fire”)

Az integrate-and-fire kifejezés eredete: idegsejtek, elektronika.

Integrál és tüzel modellek

modell definíció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A természetben / társadalmakban gyakori az, hogy egy periodikus (ismétlődő) folyamatban

- hosszú ideig semmi látványos nem történik („integrate”)
- a ciklus egy helyén valami rövid látványos esemény („fire”)

Az integrate-and-fire kifejezés eredete: idegsejtek, elektronika.

Definíció. Egy részecske két dolgot tud csinálni: integrál vagy tüzel.

Integrál és tüzel modellek

modell definíció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

A természetben / társadalmakban gyakori az, hogy egy periodikus (ismétlődő) folyamatban

- hosszú ideig semmi látványos nem történik („integrate”)
- a ciklus egy helyén valami rövid látványos esemény („fire”)

Az integrate-and-fire kifejezés eredete: idegsejtek, elektronika.

Definíció. Egy részecske két dolgot tud csinálni: integrál vagy tüzel.

- T ismét az oszcilláció periódusidejét jelöli
- a részecske ϕ **fázisa** egyenletesen nő: $d\phi(t)/dt = 1/T$
- a részecske **állapotváltozója** $x = f(\phi(t))$
 - monoton nő az $x = 1$ küszöbig
 - onnan azonnal visszaugrik az $x = 0$ -ra

Integrál és tüzel modellek

modell definíció

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagter kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A természetben / társadalmakban gyakori az, hogy egy periodikus (ismétlődő) folyamatban

- hosszú ideig semmi látványos nem történik („integrate”)
- a ciklus egy helyén valami rövid látványos esemény („fire”)

Az integrate-and-fire kifejezés eredete: idegsejtek, elektronika.

Definíció. Egy részecske két dolgot tud csinálni: integrál vagy tüzel.

- T ismét az oszcilláció periódusidejét jelöli
- a részecske ϕ **fázisa** egyenletesen nő: $d\phi(t)/dt = 1/T$
- a részecske **állapotváltozója** $x = f(\phi(t))$
 - monoton nő az $x = 1$ küszöbig
 - onnan azonnal visszaugrik az $x = 0$ -ra

Az $f(\phi) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény sima,

$$\underbrace{\frac{df}{d\phi} > 0}, \quad \underbrace{\frac{d^2f}{d\phi^2} < 0} \text{ és } \begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow \phi = 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow \phi = 1 \end{cases} \text{ azaz } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Integrál és tüzel modellek

modell definíció: egy részecske dinamikája

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

**Egy részecske
dinamikája**

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A definíció alapján kölcsönhatás nélkül az oszcilláló részecske x állapotváltozója a saját ϕ fázisa függvényében:

Integrál és tüzel modellek

modell definíció: egy részecske dinamikája

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

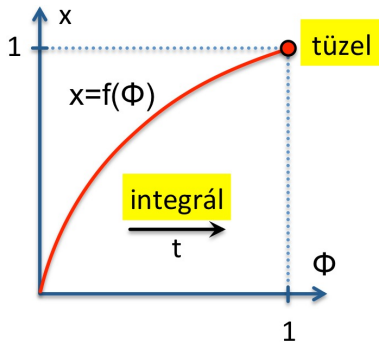
Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A definíció alapján kölcsönhatás nélkül az oszcilláló részecske x állapotváltozója a saját ϕ fázisa függvényében:



Integrál és tüzel modellek

modell definíció: egy részecske dinamikája

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoitl oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

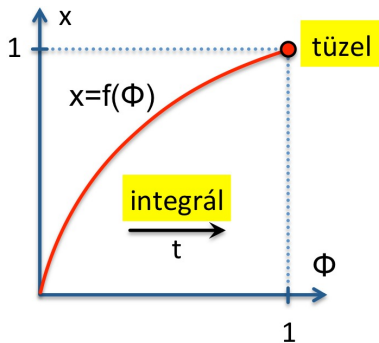
Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A definíció alapján kölcsönhatás nélkül az oszcilláló részecske x állapotváltozója a saját ϕ fázisa függvényében:



Kölcsönhatás nélkül ez a dinamika:

- 1, időben integrálás: $\phi = x = 0$ -tól $\phi = x = 1$ -ig
- 2, az $x = 1$ elérésekor ugrás le $x = 0$ -ra

Integrál és tüzel modellek

modell definíció: kölcsönhatás

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A kölcsönhatás definíciója:

- ha egy oszillátor tüzel (az $x_i = 1$ állapotban van),
- akkor a többi oszillátor állapotváltozóját
 - növeli ϵ -nal, tehát $x_j \rightarrow x_j + \epsilon$ lesz,
 - de ha $x_j + \epsilon > 1$, akkor csak az $x_j = 1$ küszöbíg mozdítja

Integrál és tüzel modellek

modell definíció: kölcsönhatás

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

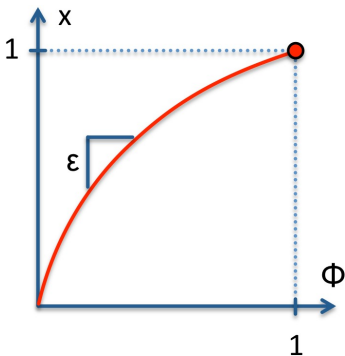
Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

A kölcsönhatás definíciója:

- ha egy oszillátor tüzel (az $x_i = 1$ állapotban van),
- akkor a többi oszillátor állapotváltozóját
 - növeli ϵ -nal, tehát $x_j \rightarrow x_j + \epsilon$ lesz,
 - de ha $x_j + \epsilon > 1$, akkor csak az $x_j = 1$ küszöbíg mozdítja

Tehát $x_i(t) = 1 \Rightarrow \forall j \neq i: x_j(t^+) = \min[1, x_j(t) + \epsilon]$



Integrál és tüzel modellek

két kölcsönható oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A fenti feltételekkel – $f(\phi): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton nő és konvex –
ha **két oszcillátor** sajátfrekvenciája azonos $\omega_j = \omega = 1/T$, akkor

Integrál és tüzel modellek

két kölcsönható oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

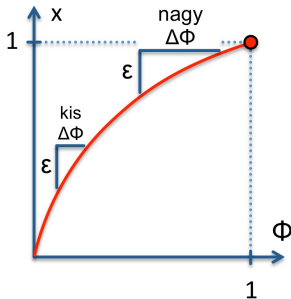
Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A fenti feltételekkel – $f(\phi): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton nő és konvex –
ha **két oszcillátor** sajátfrekvenciája azonos $\omega_j = \omega = 1/T$, akkor

szinkronizálódnak:



Integrál és tüzel modellek

két kölcsönható oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

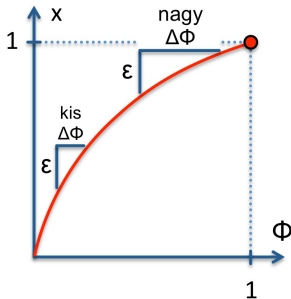
Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A fenti feltételekkel – $f(\phi): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton nő és konvex –
ha **két oszcillátor** sajátfrekvenciája azonos $\omega_i = \omega = 1/T$, akkor

szinkronizálódnak:



Magasabb ϕ fázis esetén
az x állapotváltozó
azonos ϵ -nyi ugrása
nagyobb $\Delta\phi$ lépést
jelent a $\phi = 1$ felé.

Integrál és tüzel modellek

két kölcsönható oszcillátor

Szinkronizáció
a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagter kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

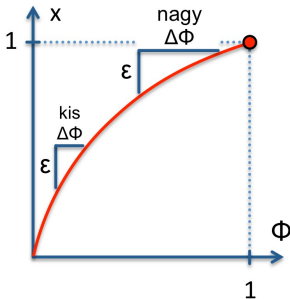
Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

A fenti feltételekkel – $f(\phi): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton nő és konvex –
ha **két oszcillátor** sajátfrekvenciája azonos $\omega_i = \omega = 1/T$, akkor

szinkronizálódnak:



Magasabb ϕ fázis esetén
az x állapotváltozó
azonos ϵ -nyi ugrása
nagyobb $\Delta\phi$ lépést
jelent a $\phi = 1$ felé.

Emiatt ha az első oszcillátor a $\phi_1 = 1$ fázisban van (éppen tüzel),

- akkor minél közelebb van hozzá a másik oszcillátor ϕ_2 fázisa
- annál jobban növeli a másik oszcillátor ϕ_2 fázisát

Abszorpció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Definíció: **Lavina** – Egy „első” tüzelés által kiváltott, „megszakítás nélküli” tüzelések sorozata.

Abszorpció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszcillátorok, távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Definíció: **Lavina** – Egy „első” tüzelés által kiváltott, „megszakítás nélküli” tüzelések sorozata.

A valóságban a tüzelés után kell egy **helyreállítási idő**

- ezalatt az oszcillátor nem érzékeli az újabb tüzeléseket
- tehát egy lavinában résztvevő oszcillátor nem érzi a lavina során (a saját helyreállítási ideje alatt) utána jövő tüzeléseket

Abszorpció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok, távolságtüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszillátor

Abszorpció

Definíció: **Lavina** – Egy „első” tüzelés által kiváltott, „megszakítás nélküli” tüzelések sorozata.

A valóságban a tüzelés után kell egy **helyreállítási idő**

- ezalatt az oszillátor nem érzékeli az újabb tüzeléseket
- tehát egy lavinában résztvevő oszillátor nem érzi a lavina során (a saját helyreállítási ideje alatt) utána jövő tüzeléseket

A jelenség időskálái:

- δt idő alatt az oszillátor felveszi a jelet és tüzel
- Δt idő alatt regenerálódik
- 1 egységnyi idő alatt integrál az oszillátor: $\phi = 0 \rightarrow 1$

Abszorpció

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Definíció: **Lavina** – Egy „első” tüzelés által kiváltott, „megszakítás nélküli” tüzelések sorozata.

A valóságban a tüzelés után kell egy **helyreállítási idő**

- ezalatt az oszcillátor nem érzékeli az újabb tüzeléseket
- tehát egy lavinában résztvevő oszcillátor nem érzi a lavina során (a saját helyreállítási ideje alatt) utána jövő tüzeléseket

A jelenség időskálái:

- δt idő alatt az oszcillátor felveszi a jelet és tüzel
- Δt idő alatt regenerálódik
- 1 egységnyi idő alatt integrál az oszcillátor: $\phi = 0 \rightarrow 1$

Jellemzően $\delta t \ll \Delta t \ll 1$

Abszorpció

szinkronizáció mechanizmusa

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Állítás: Ha (i) van abszorpció és (ii) $N \gg 1/\epsilon$ oszillátor van a rendszerben (egymással kölcsönhatnak),

Abszorpció

szinkronizáció mechanizmusa

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatolt oszillátorok,
távolságfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszillátor

Abszorpció

Állítás: Ha (i) van abszorpció és (ii) $N \gg 1/\epsilon$ oszillátor van a rendszerben (egymással kölcsönhatnak),

akkor \forall monoton $f(\phi)$ függvény esetén van szinkronizáció (nincsen szükség arra, hogy $f(\phi)$ konvex legyen)

Abszorpció

szinkronizáció mechanizmusa

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos
modellek

Kölcsönható
oszcillátorok

Kuramoto-modell,
átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok,
távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és
Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel
modellek

Egy részecske
dinamikája

Kölcsönhatás
definíciója

Két kölcsönható
oszcillátor

Abszorpció

Állítás: Ha (i) van abszorpció és (ii) $N \gtrsim 1/\epsilon$ oszcillátor van a rendszerben (egymással kölcsönhatnak),

akkor \forall monoton $f(\phi)$ függvény esetén van szinkronizáció (nincsen szükség arra, hogy $f(\phi)$ konvex legyen)

Részletek:

Ha van két olyan oszcillátor, amelynek az állapota $|x_j - x_i| < \epsilon$, akkor

- ketten szinkronizálódnak – az abszorpció miatt stabilan!
- mivel az x legfeljebb 1-ig „lökődhet” előre, ezért a már csoportosult oszcillátorok tüzelési lavinái a többi oszcillátort felzárkóztatják magukhoz
- és végül az egész rendszer szinkronizálódik

Abszorpció

szinkronizáció mechanizmusa

Szinkronizáció a biológiában

Bevezetés

Folytonos modellek

Kölcsönható oszcillátorok

Kuramoto-modell, átlagtér kölcsönhatás

Csatoit oszcillátorok, távolságtfüggő kh.

Langevin egyenlet és Fokker-Planck egy.

Zajos oszcillátorok

Integrál és tüzel modellek

Egy részecske dinamikája

Kölcsönhatás definíciója

Két kölcsönható oszcillátor

Abszorpció

Állítás: Ha (i) van abszorpció és (ii) $N \gg 1/\epsilon$ oszcillátor van a rendszerben (egymással kölcsönhatnak),

akkor \forall monoton $f(\phi)$ függvény esetén van szinkronizáció (nincsen szükség arra, hogy $f(\phi)$ konvex legyen)

Részletek:

Ha van két olyan oszcillátor, amelynek az állapota $|x_j - x_i| < \epsilon$, akkor

- ketten szinkronizálódnak – az abszorpció miatt stabilan!
- mivel az x legfeljebb 1-ig „lökődhet” előre, ezért a már csoportosult oszcillátorok tüzelési lavinái a többi oszcillátort felzárkóztatják magukhoz
- és végül az egész rendszer szinkronizálódik

A korábbiakhoz hasonlóan példaként két modellezési lehetőség:

- átlagtér modell (mindenki mindenkit „lát”)
- lokális kölcsönhatás – a Kuramoto-modellhez hasonló

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

HÁLÓZATOK I: ALAPFOGALMAK

Gráfok, szomszédsági mátrix, ritka gráf, fokszám és klaszterezettség, kis világ tulajdonság, skálafüggetlenség.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

BEVEZETÉS

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Mi az, hogy hálózat?

Hálózatok mindenütt...

(Az Internet)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

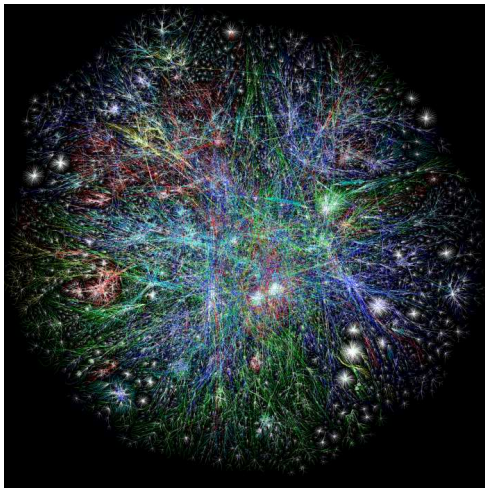
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skaláláfüggelenség



Hálózatok mindenütt...

(Emberi kapcsolatok)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

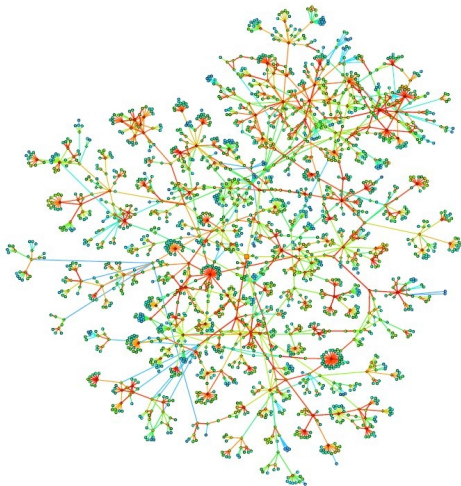
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség



Hálózatok mindenütt...

(Közlekedés)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

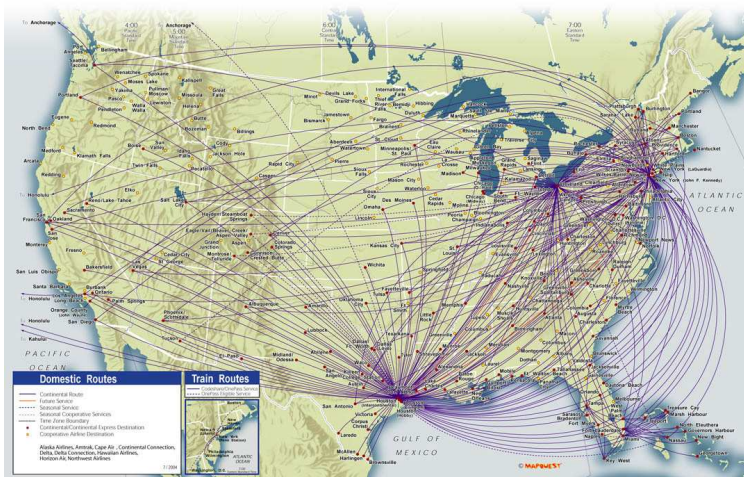
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggelenség



Hálózatok mindenütt...

(Fehérje kölcsönhatás)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

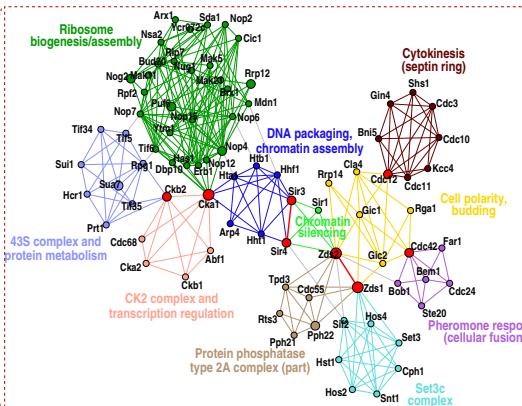
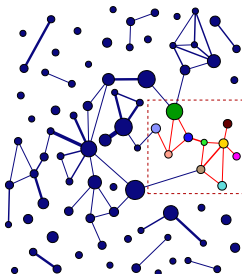
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség



Hálózatok mindenütt...

(Betegségek)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

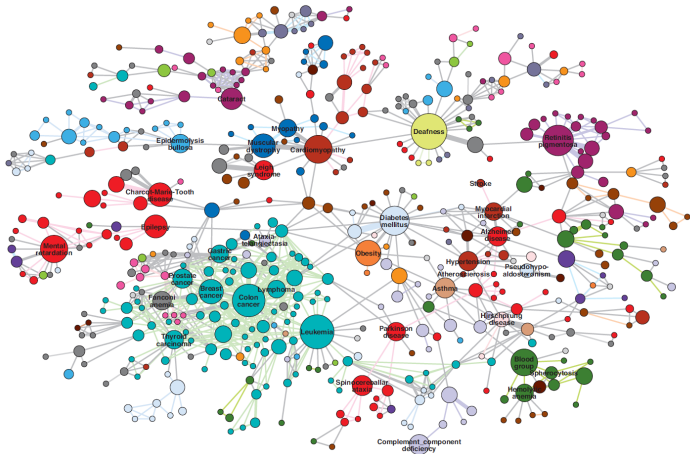
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség



Hálózatok mindenütt...

(Gazdaság)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

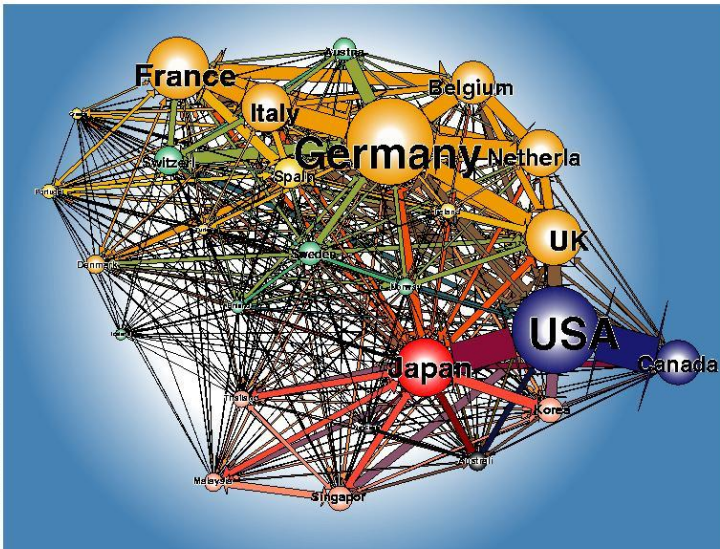
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság



1980-11-31:25 > OECD792.EFB, World Trade 1992 (DECC) enhanced 1991 AuschnE: 0,0,0,0,1,0,1,0

A hálózatos megközelítés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

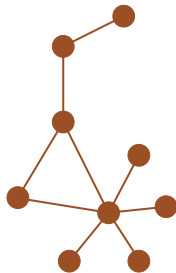
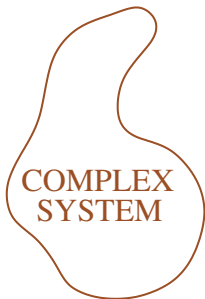
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség



GRAPH

Történeti áttekintés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

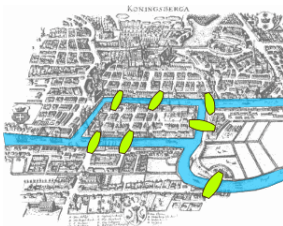
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- **Leonhard Euler (1735):**
A königsbergi hidak problémája és a **gráfelmélet**.



Történeti áttekintés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

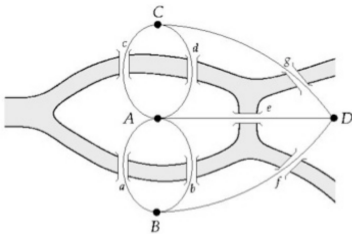
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

- **Leonhard Euler (1735):**
A könygsbergi hidak problémája és a **gráfelmélet**.



Történeti áttekintés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláláfüggelenség

- **Erdős Pál és Rényi Alfréd (1959): véletlen gráfok.**



- **Stanley Milgram (1967): 6 lépés távolság.**



Történeti áttekintés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok
Szomszédsági
mátrix
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése
Kis világ tulajdonság
Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

- **Duncan Watts és Steven H. Strogatz (1998):**
Kis világ hálózatok.



- **Barabási Albert-László és Albert Réka (1999):**
Skálafüggetlen hálózatok.



A hálózatkutatás alkalmazásai

Járványterjedés előrejelzése

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

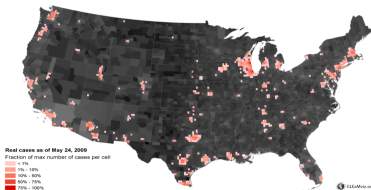
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

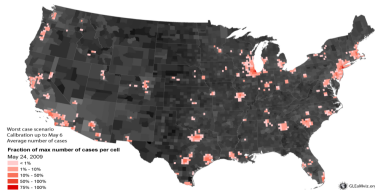
Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

A H1N1 terjedésének előrejelzése 2009-ben:

Real



Projected



A hálózatkutatás alkalmazásai

Gyógyszerfejlesztés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

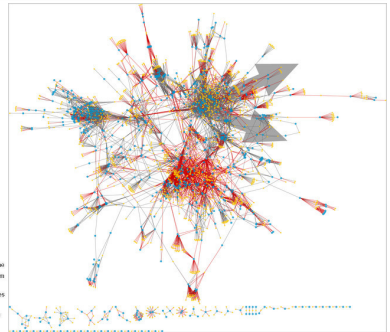
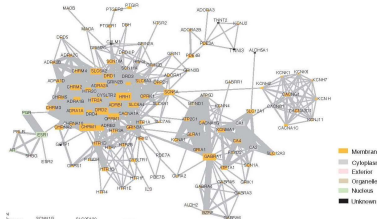
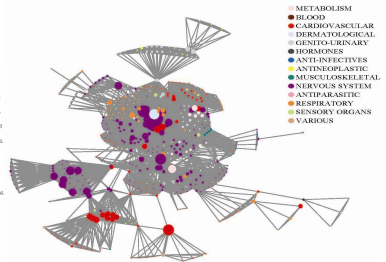
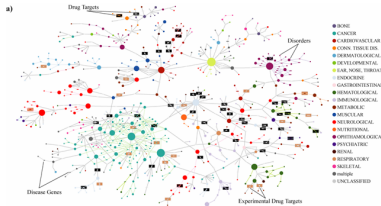
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség



A hálózatkutatás alkalmazásai

Hírszerzés, terrorizmus, stb.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség

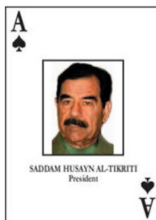
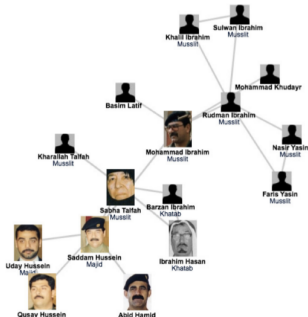


Image 1.2a

The network of Saddam Hussein.

Ace of Spades. One of the 55 cards the US military has handed out to the coalition forces in Iraq, each listing a top official to be captured following the country's 2003 invasion. The card shows the ace of spades, with the image of Saddam Hussein, Iraq's deposed president and dictator, the top prize of the hunt.



A hálózat kutatás alkalmazásai

Hírszerzés, terrorizmus, stb.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

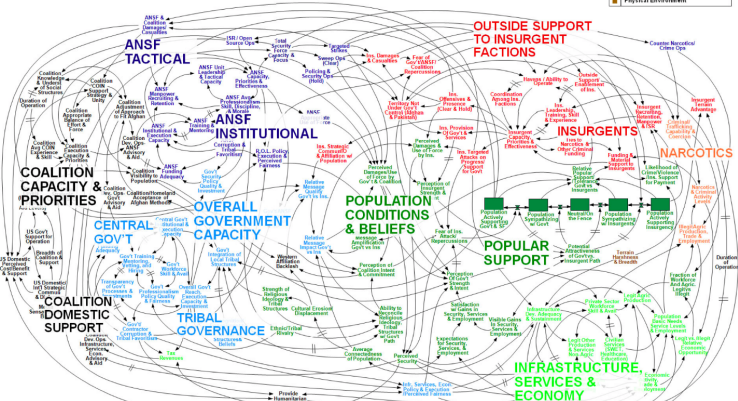
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggelenség

= Significant Delay

- Population/Popular Support
- Infrastructure, Economy, & Services
- Government
- Afghanistan Security Forces
- Insurgents
- Crime and Narcotics
- Coalition Forces & Actions
- Physical Environment



A hálózatkutatás alkalmazásai

Hírszerzés, terrorizmus, stb.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálápfüggelenség

Network Science Center West Point

<http://blog.netsciwestpoint.org/>



<http://www.ns-cta.org/ns-cta-blog/>

A hálózatkutatás alkalmazásai

Szervezetfejlesztési tanácsadás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

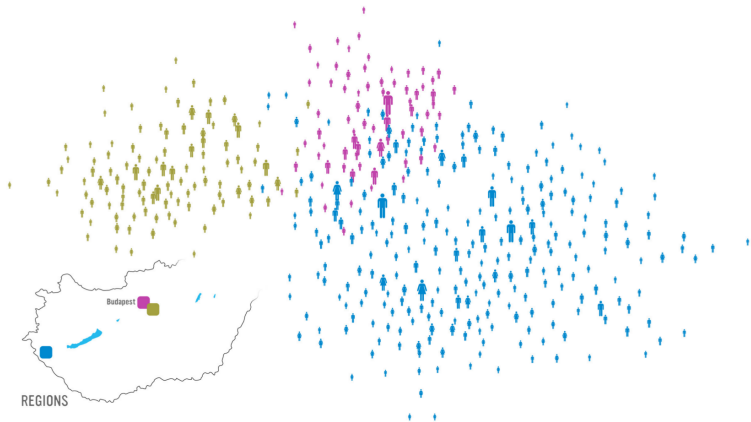
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalálhatóság



A hálózatkutatás alkalmazásai

Szervezetfejlesztési tanácsadás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség



A hálózatkutatás alkalmazásai

Szervezetfejlesztési tanácsadás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalálhatóság



A hálózatkutatás alkalmazásai

Szervezetfejlesztési tanácsadás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség



Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

GRÁFOK

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

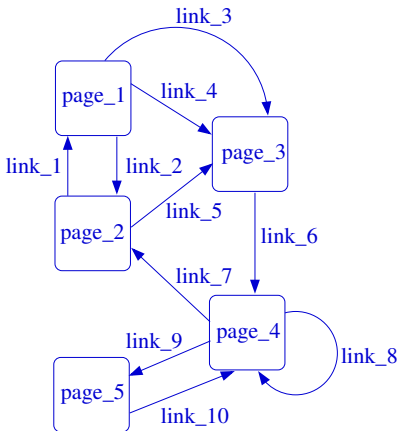
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Ugyanazt a rendszert több fajta gráffal is reprezentálhatjuk!



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történelmi áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

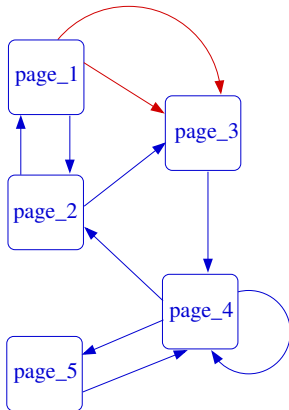
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Ugyanazt a rendszert több fajta gráffal is reprezentálhatjuk!



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

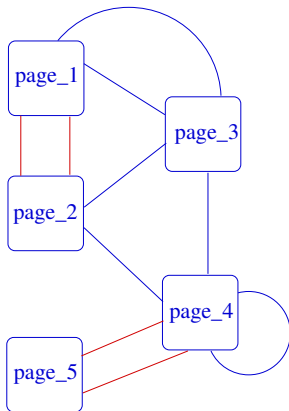
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláláfüggelenség

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Ugyanazt a rendszert több fajta gráffal is reprezentálhatjuk!



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

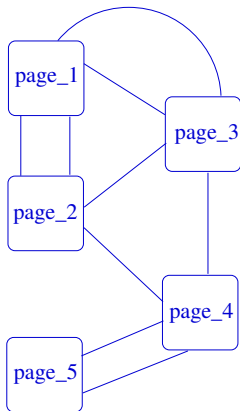
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Ugyanazt a rendszert több fajta gráffal is reprezentálhatjuk!



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

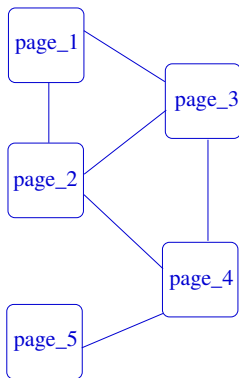
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Hálózat: egy rendszer gráf alapú „reprezentációja”

Hálózatok I.

Ugyanazt a rendszert több fajta gráffal is reprezentálhatjuk!



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történelmi áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggelenség

Gráf típusok

- egyszerű gráf: csak egyszeres élek, önmagával nem lehet összekötve egy csúcs.
 - multi gráf: lehetnek többszörös élek, önmagával nem lehet összekötve egy csúcs.
 - pszeudo gráf: lehetnek többszörös élek és az is megengedett, hogy egy él ugyanazon csúcson kezdődjön és érjen véget.
-
- irányított gráf: az éleknek van iránya, aszimmetrikus a kapcsolat.
 - irányítatlan gráf: az éleknek nincs iránya, szimmetrikus a kapcsolat.
-
- súlyozott gráf: az élekhez súly (intenzitás, erősség, stb.) érték társul.
 - súlyozatlan gráf: az élek „binárisak”.
-
- páros gráf: két fajta csúcs, az élek csak eltérő fajtájú csúcsok közt húzódhatnak.

Páros gráfok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

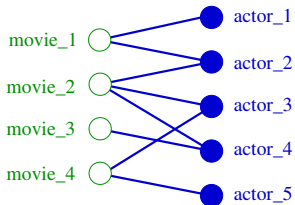
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság

Pl. a filmek és filmszínészek páros gráfja, és annak projekciói:



Páros gráfok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

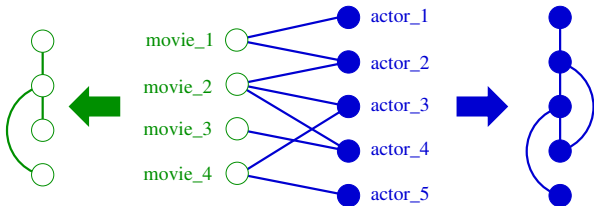
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatatlanság

Pl. a filmek és filmszínészek páros gráfja, és annak projekciói:



Páros gráfok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

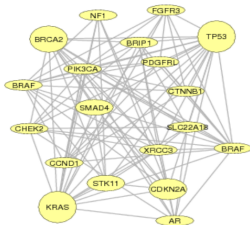
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

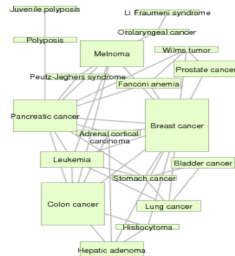
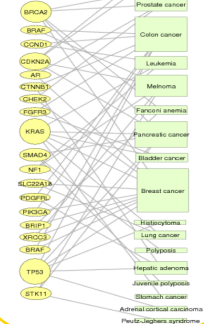


Gene network

DISEASOME

PHENOME

GENOME



Disease network

Goh, Cusick, Valle, Childs, Vidal & Barabási, PNAS (2007)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Hogyan tároljunk el egy hálózatot a számítógépen?

Szomszédsági mátrix

Definíció

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

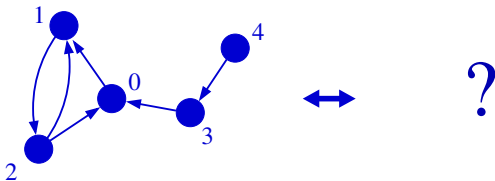
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Szomszédsági mátrix

- minden sor és oszlop egy-egy csúcsnak felel meg,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \rightarrow j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Szomszédsági mátrix

Definíció

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

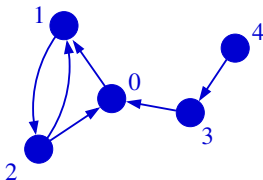
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Szomszédsági mátrix

- minden sor és oszlop egy-egy csúcsnak felel meg,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \rightarrow j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, ...
- súlyozott hálózatok esetén ...
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:
- Az A_i spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.

- súlyozott hálózatok esetén ...

- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:

• Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

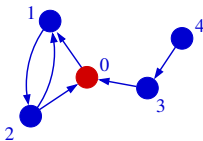
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

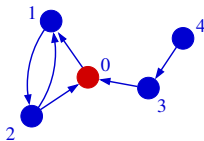
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

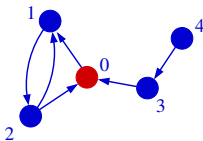
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

- Az A_i spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

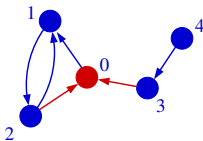
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

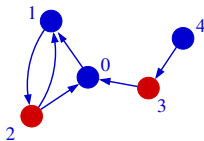
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláláfüggelenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

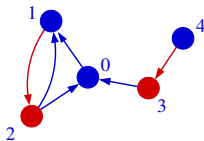
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

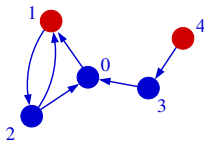
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

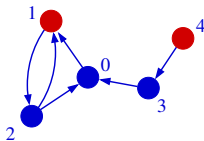
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálátfüggetlenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Tulajdonságok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

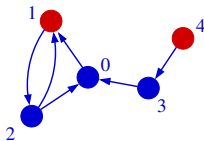
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláláfüggelenség

- ha a hálózat irányítatlan, A_{ij} szimmetrikus.
- súlyozott hálózatok esetén A_{ij} valós értékeket vehet fel.
- Egy pozícióvektort A_{ij} -vel szorozva:



position:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Az A_{ij} spektruma nagyon hasznos bizonyos problémáknál.

Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

**Szomszédsági
mátrix**

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

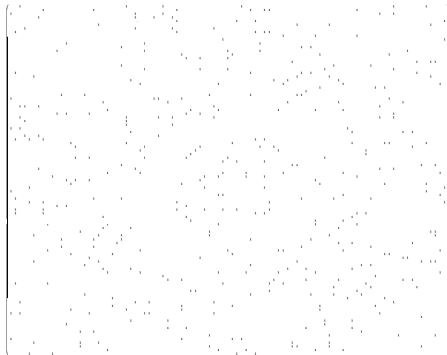
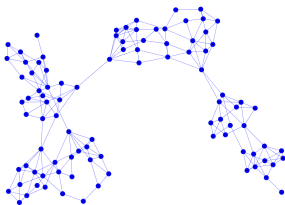
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- A valós hálózatok esetén A_{ij} többnyire nullákból áll...



Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

**Szomszédsági
mátrix**

Ritka gráfok

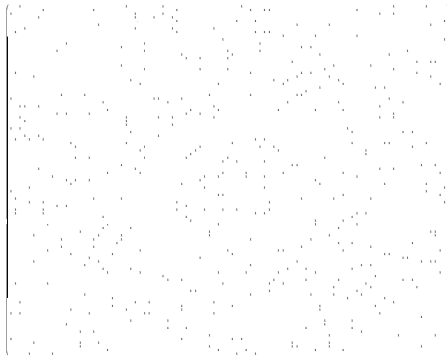
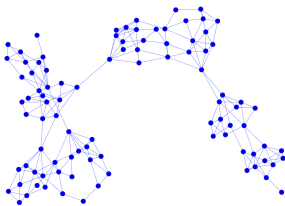
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

- A valós hálózatok esetén A_{ij} többnyire nullákból áll...



- Ez egy **ritka gráf!**

Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

**Szomszédsági
mátrix**

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- Egy csomó nullát tárolni nem olyan jó ötlet...

Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

**Szomszédsági
mátrix**

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- Egy csomó nullát tárolni nem olyan jó ötlet...

→ Hogy lehetne ezt kiküszöbölni?

Szomszédsági mátrix

Hátrány

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

**Szomszédsági
mátrix**

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- Egy csomó nullát tárolni nem olyan jó ötlet...

→ Hogy lehetne ezt kiküszöbölni?

- Használjunk pl. éllistát helyette.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Hogyan lehetne a „ritkaságot” egy kicsit precízebben definiálni?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Ritka gráfok

- Jelölje N a gráf csúcsainak számát, M pedig az éleinek számát.
- Egy gráf (hálózat) **ritka**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N$** .
- Egy gráf (hálózat) **sűrű**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N^2$** .

Mi a helyzet a csúcsok átlagos kapcsolatszámával?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Ritka gráfok

- Jelölje N a gráf csúcsainak számát, M pedig az éleinek számát.
- Egy gráf (hálózat) **ritka**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N$** .
- Egy gráf (hálózat) **sűrű**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N^2$** .

Mi a helyzet a csúcsok átlagos kapcsolatszámával?

Ritka gráfok

- Jelölje N a gráf csúcsainak számát, M pedig az éleinek számát.
- Egy gráf (hálózat) **ritka**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N$** .
- Egy gráf (hálózat) **sűrű**, ha az $N \rightarrow \infty$ határesetben **az élek száma $M \sim N^2$** .

Mi a helyzet a csúcsok átlagos kapcsolatszámával?

- ha ritka: $\langle d \rangle = \frac{2M}{N} \rightarrow \text{const.}$,
- ha sűrű: $\langle d \rangle = \frac{2M}{N} \sim N \rightarrow \infty!$

Ritka hálózatok

A gyakorlatban

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálátfüggetlenség

Ha egy hálózatban a csúcsokra jutó átlagos kapcsolatszám több nagyságrenddel kisebb mint a rendszerméret, akkor ritkának tekinthető.

Ritka hálózatok

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatatlanság

A legtöbb valódi rendszert leíró hálózat ritka!

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999	1
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001	2
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998	3
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b	4
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b	5
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c	6
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b	7
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	8
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000	12
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000	13
Words, cooccurrence	460,902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001	14
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001	15
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998	17

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Mik a ritkaság következményei?

- a szomszédsági mátrix helyett az élek listáját tároljuk el,
- $\langle d \rangle \ll N$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Mik a ritkaság következményei?

- a szomszédsági mátrix helyett az élek listáját tároljuk el,
- $\langle d \rangle \ll N$
- Mi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen választott csúcs össze van kötve?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Mik a ritkaság következményei?

- a szomszédsági mátrix helyett az élek listáját tároljuk el,
- $\langle d \rangle \ll N$
- Mi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen választott csúcs össze van kötve?
- **Ez a valószínűség elhanyagolható!** (Azaz 0-hoz tart, ha $N \rightarrow \infty$).

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

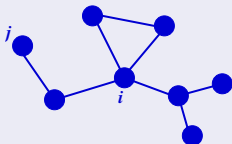
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

HÁLÓZATJELLEMZŐK

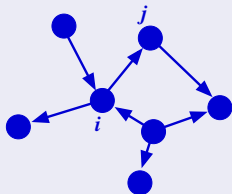
Fokszám

- Egy csúcs fokszáma a hozzá kapcsolódó élek számával egyezik meg. Az i csúcs fokszámát d_i -vel fogjuk jelölni.



$$d_i = 4, d_j = 1.$$

- Ha a hálózat irányított $\rightarrow d_{i,be}$ és $d_{i,ki}$.



$$d_{i,be} = 2, d_{j,ki} = 1.$$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

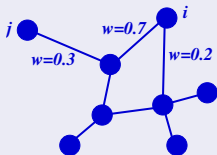
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skaláláfüggelenség

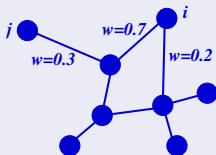
Fokszám

- Súlyozott hálózatok?



Fokszám

- Súlyozott hálózatok: csúcs erősség, s_i



$$s_i = 0.9, s_j = 0.3.$$

Hálózatok I.

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Hálózatok I.

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Fokszám

Példák

Hálózatok I.

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

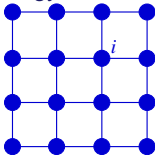
Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Hálózatok I.

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?

● 1d lánc?  $d_i = 2$

● 2d négyzetrács?



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

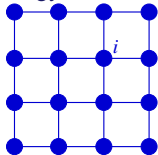
Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Hálózatok I.

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?

● 1d lánc?  $d_i = 2$

● 2d négyzetrács?



$d_i = 4$

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

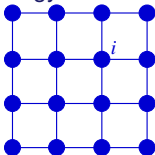
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?

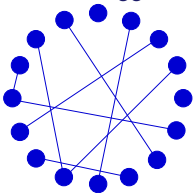
- 1d lánc?  $d_i = 2$

- 2d négyzetrács?



$$d_i = 4$$

- Egy N csúcsból álló véletlen gráfban, ahol minden csúcspárt p valószínűséggel kötünk össze? (Erdős–Rényi-modell)



Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

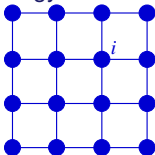
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Mennyi az i csúcs fokszáma az alábbi példákban?

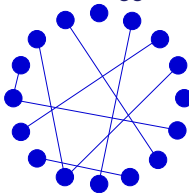
- 1d lánc?  $d_i = 2$

- 2d négyzetrács?



$$d_i = 4$$

- Egy N csúcsból álló véletlen gráfban, ahol minden csúcspárt p valószínűséggel kötünk össze? (Erdős–Rényi-modell)



$$\langle d_i \rangle = (N - 1)p \simeq Np$$

Fokszám és szomszédsági mátrix

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

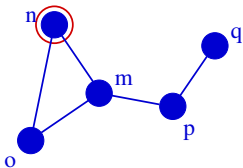
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség



$$\begin{array}{c} m \\ n \\ o \\ p \\ q \end{array} \begin{pmatrix} m & n & o & p & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_n = ?$$

Fokszám és szomszédsági mátrix

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

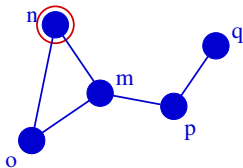
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség



	m	n	o	p	q
m	0	1	1	1	0
n	1	0	1	0	0
o	1	1	0	0	0
p	1	0	0	0	1
q	0	0	0	1	0

$$d_n = \sum_j A_{jn}$$
$$= \sum_j A_{nj}$$

Fokszám és szomszédsági mátrix

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

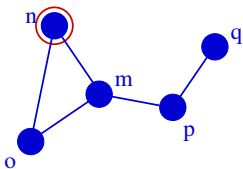
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

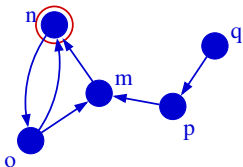
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség


$$\begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & o & p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \\ o \\ p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$d_n = \sum_j A_{jn}$$
$$= \sum_j A_{nj}$$


$$\begin{matrix} & \begin{matrix} m & n & o & p & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \\ o \\ p \\ q \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$d_n^{\text{in}} = ?$$
$$d_n^{\text{out}} = ?$$

Fokszám és szomszédsági mátrix

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

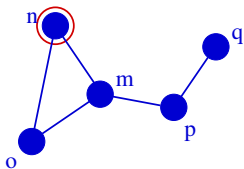
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

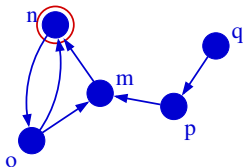
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláfüggetlenség


$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & m & n & o & p & q \\ m & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ n & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ o & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$


$$\begin{aligned} d_n &= \sum_j A_{jn} \\ &= \sum_j A_{nj} \end{aligned}$$


$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & m & n & o & p & q \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ o & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$


$$\begin{aligned} d_n^{be} &= \sum_j A_{jn} \\ d_n^{ki} &= \sum_j A_{nj} \end{aligned}$$

Átlagos fokszám

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Átlagos fokszám

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggelenség

Átlagos fokszám

$$\langle d \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{2M}{N},$$

- egy fajta **sűrűség**.
- Irányított hálózatok:

$$\langle d_{bc} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{i,bc} = \frac{M}{N} = \langle d_{ki} \rangle$$

Átlagos fokszám

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Átlagos fokszám

$$\langle d \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{2M}{N},$$

- egy fajta **sűrűség**.
- Irányított hálózatok:

$$\langle d_{be} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{i,be} = \frac{M}{N} = \langle d_{ki} \rangle$$

Háromszögek, tranzitivitás, klaszterezettség

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- A barátod barátja neked is barátod?
- Két barátod egymással is barátságban vannak?

Háromszögek, tranzitivitás, klaszterezettség

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- A barátod barátja neked is barátod?
- Két barátod egymással is barátságban vannak?
Sok esetben igen.

Háromszögek, tranzitivitás, klaszterezettség

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- A barátod barátja neked is barátod?
- Két barátod egymással is barátságban vannak?

Sok esetben igen.

→ sok **háromszög** fordul elő az emberi kapcsolatok hálózatában.

Háromszögek, tranzitivitás, klaszterezettség

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- A barátod barátja neked is barátod?
- Két barátod egymással is barátságban vannak?

Sok esetben igen.

→ sok **háromszög** fordul elő az emberi kapcsolatok hálózatában.

A tranzitivitás mérése a **klaszterezettségi együtthatóval** történik.

Klaszterezettségi együttható

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Klaszterezettségi együttható

- Az i csúcs klaszterezettségi együtthatója:

$$C_i \equiv \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)},$$

ahol e_i az i szomszédai közt lévő élek száma. (Ennélfogva $C_i \in [0, 1]$).

- Ha $d_i < 2$, akkor definíciószerűen $C_i = 0$.

Klaszterezettségű együtttható

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

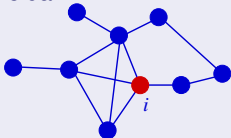
Klaszterezettségű együtttható

- Az i csúcs klaszterezettségű együttthatója:

$$C_i \equiv \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)},$$

ahol e_i az i szomszédai közt lévő élek száma. (Ennélfogva $C_i \in [0, 1]$).

Példa:



- Ha $d_i < 2$, akkor definíciószerűen $C_i = 0$.

Klaszterezettségi együttható

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggelenség

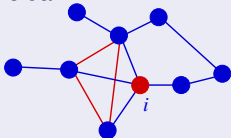
Klaszterezettségi együttható

- Az i csúcs klaszterezettségi együtthatója:

$$C_i \equiv \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)},$$

ahol e_i az i szomszédai közt lévő élek száma. (Ennélfogva $C_i \in [0, 1]$).

Példa:



$$C_i = \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ha $d_i < 2$, akkor definíciószerűen $C_i = 0$.

Klaszterezettségű együtttható

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggelenség

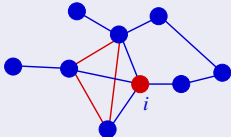
Klaszterezettségű együtttható

- Az i csúcs klaszterezettségű együttthatója:

$$C_i \equiv \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)},$$

ahol e_i az i szomszédai közt lévő élek száma. (Ennélfogva $C_i \in [0, 1]$).

Példa:



$$C_i = \frac{2e_i}{d_i(d_i - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ha $d_i < 2$, akkor definíciószerűen $C_i = 0$.

Átlagos klaszterezettségi együttható

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggelenség

Átlagos klaszterezettségi együttható

- A hálózat átlagos klaszterezettségi együtthatója

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i,$$

ahol N a csúcsok száma.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- Ha $\langle d \rangle$ a globális élsűrűséget méri, akkor mit mér $\langle C \rangle$?

Klaszterezettségi együttható

Szemléltetés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- Ha $\langle d \rangle$ a globális élsűrűséget méri, akkor mit mér $\langle C \rangle$?

→ **A lokális élsűrűséget!**

Klaszterezettségi együtttható

Szemléltetés

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

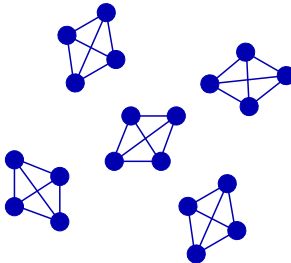
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

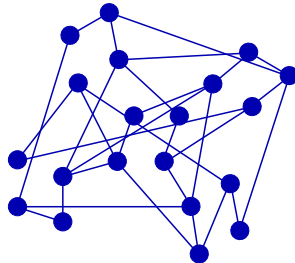
Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- Ha $\langle d \rangle$ a globális élsűrűséget méri, akkor mit mér $\langle C \rangle$?

→ A **lokális** élsűrűséget!



$$\langle k \rangle = 3, \quad \langle C \rangle = 1$$



$$\langle k \rangle = 3, \quad \langle C \rangle = 0$$

C a valódi rendszereket leíró hálózatokban

Hálózatok I.

A valós hálózatokban mért $\langle C \rangle$ és az azonos N és M paraméterekkel rendelkező véletlen gráfokhoz tartozó értékek:

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000
Words, cooccurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998

C a valódi rendszereket leíró hálózatokban

Hálózatok I.

A valós hálózatokban mért $\langle C \rangle$ és az azonos N és M paraméterekkel rendelkező véletlen gráfokhoz tartozó értékek:

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000
Words, cooccurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998

A KLASZTEREZETTSÉGI EGYÜTTHATÓ NAGY EZEK BEN A HÁLÓZATOKBAN!

Miért sokkal alacsonyabb a véletlen gráfok C -je?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Miért sokkal alacsonyabb a véletlen gráfok C -je?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

- A C szemléletes jelentése: annak valószínűsége, hogy az adott csúcs szomszédai egymásnak is szomszédai.

→ Ha gráf ritka és teljesen véletlenszerű, ez a valószínűség nagyon alacsony lesz...

Miért sokkal alacsonyabb a véletlen gráfok C -je?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

- A C szemléletes jelentése: annak valószínűsége, hogy az adott csúcs szomszédai egymásnak is szomszédai.
- Ha gráf **ritka** és **teljesen véletlenszerű**, ez a valószínűség nagyon alacsony lesz...

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Távolság (legrövidebb úthossz)

- ℓ_{ij} : az i -ből induló, j -be érkező legrövidebb útvonal éleinek száma.
- Tulajdonságai:
 - $\ell_{ii} = 0$
 - Irányítatlan hálózatban $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.
 - Ha nem lehet j -be eljutni i -ből, akkor $\ell_{ij} = \infty$.
- súlyozott hálózatok?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Távolság (legrövidebb úthossz)

- ℓ_{ij} : az i -ből induló, j -be érkező legrövidebb útvonal éleinek száma.
- Tulajdonságai:
 - $\ell_{ii} = 0$
 - Irányítatlan hálózatban $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.
 - Ha nem lehet j -be eljutni i -ből, akkor $\ell_{ij} = \infty$.
- súlyozott hálózatok?

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Távolság (legrövidebb úthossz)

- ℓ_{ij} : az i -ből induló, j -be érkező legrövidebb útvonal éleinek száma.
- Tulajdonságai:
 - $\ell_{ii} = 0$
 - Irányítatlan hálózatban $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.
 - Ha nem lehet j -be eljutni i -ből, akkor $\ell_{ij} = \infty$.
- súlyozott hálózatok: pl. a minimális összesített élsúlyhoz tartozó út.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Átlagos távolság (átlagos legrövidebb úthossz)

- Egy adott i csúcsra:

$$\langle \ell_i \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_j \ell_{ij},$$

a teljes hálózatra

$$\langle \ell \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \ell_{ij}$$

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

A kis világ tulajdonságra elsőként **Karinthy Frigyes** hívta fel a figyelmet az 1920-as években...



(1887-1938)

Láncszemek (1929)

„Tessék egy akármilyen meghatározható egyént kijelölni a Föld másfél milliárd lakója közül, bármelyik pontján a Földnek – ő fogadást ajánl, hogy legföljebb öt más egyénen keresztül, kik közül az egyik neki személyes ismerőse, kapcsolatot tud létesíteni az illetővel,...”

„A nehezebb feladatot: egy szögecselő munkást a Ford-művek műhelyéből, ezek után magam vállaltam, és négy láncszemmel szerencsésen meg is oldottam. A munkás ismeri műhelyfőnökét, műhelyfőnöke magát Fordot, Ford jóban van a Hearst-lapok vezérigazgatójával, a Hearst-lapok vezérigazgatójával tavaly alaposan összeismerkedett Pásztor Árpád úr, aki nekem nemcsak ismerősöm, de tudtommal kitűnő barátom – csak egy szavamba kerül, hogy sürgönyözzön a vezérigazgatónak, hogy szóljon Fordnak, hogy Ford szóljon a műhelyfőnöknek, hogy az a szögecselő munkás sürgősen szögecseljen nekem össze egy autót, éppen szükségem lenne rá.”

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutató
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Véletlenszerűen választott embereket megkérték Nebraskában, hogy juttassanak el egy levezőlapot egy számukra ismeretlen bostoni brókerhez a személyes ismerőseiken keresztül.



HOW TO TAKE PART IN THIS STUDY

1. **ADD YOUR NAME TO THE ROSTER AT THE BOTTOM OF THIS SHEET**, so that the next person who receives this letter will know who it came from.
2. **DETACH ONE POSTCARD. FILL IT AND RETURN IT TO HARVARD UNIVERSITY.** No stamp is needed. The postcard is very important. It allows us to keep track of the progress of the folder as it moves toward the target person.
3. **IF YOU KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, MAIL THIS FOLDER DIRECTLY TO HIM (HER).** Do this only if you have previously met the target person and know each other on a first name basis.
4. **IF YOU DO NOT KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, DO NOT TRY TO CONTACT HIM DIRECTLY. INSTEAD, MAIL THIS FOLDER (POST CARDS AND ALL) TO A PERSONAL ACQUAINTANCE WHO IS MORE LIKELY THAN YOU TO KNOW THE TARGET PERSON.** You may send the folder to a friend, relative or acquaintance, but it must be someone you know on a first name basis.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Véletlenszerűen választott embereket megkérték Nebraskában, hogy juttassanak el egy levezőlapot egy számukra ismeretlen bostoni brókerhez a személyes ismerőseiken keresztül.



HOW TO TAKE PART IN THIS STUDY

1. ADD YOUR NAME TO THE ROSTER AT THE BOTTOM OF THIS SHEET, so that the next person who receives this letter will know who it came from.
2. DETACH ONE POSTCARD. FILL IT AND RETURN IT TO HARVARD UNIVERSITY. No stamp is needed. The postcard is very important. It allows us to keep track of the progress of the folder as it moves toward the target person.
3. IF YOU KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, MAIL THIS FOLDER DIRECTLY TO HIM (HER). Do this only if you have previously met the target person and know each other on a first name basis.
4. IF YOU DO NOT KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, DO NOT TRY TO CONTACT HIM DIRECTLY. INSTEAD, MAIL THIS FOLDER (POST CARDS AND ALL) TO A PERSONAL ACQUAINTANCE WHO IS MORE LIKELY THAN YOU TO KNOW THE TARGET PERSON. You may send the folder to a friend, relative or acquaintance, but it must be someone you know on a first name basis.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Véletlenszerűen választott embereket megkértek Nebraskában, hogy juttassanak el egy levezőlapot egy számukra ismeretlen bostoni brókerhez a személyes ismerőseiken keresztül.



HOW TO TAKE PART IN THIS STUDY

1. ADD YOUR NAME TO THE ROSTER AT THE BOTTOM OF THIS SHEET, so that the next person who receives this letter will know who it came from.
2. DETACH ONE POSTCARD. FILL IT AND RETURN IT TO HARVARD UNIVERSITY. No stamp is needed. The postcard is very important. It allows us to keep track of the progress of the folder as it moves toward the target person.
3. IF YOU KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, MAIL THIS FOLDER DIRECTLY TO HIM (HER). Do this only if you have previously met the target person and know each other on a first name basis.
4. IF YOU DO NOT KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, DO NOT TRY TO CONTACT HIM DIRECTLY. INSTEAD, MAIL THIS FOLDER (POST CARDS AND ALL) TO A PERSONAL ACQUAINTANCE WHO IS MORE LIKELY THAN YOU TO KNOW THE TARGET PERSON. You may send the folder to a friend, relative or acquaintance, but it must be someone you know on a first name basis.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Véletlenszerűen választott embereket megkértek Nebraskában, hogy juttassanak el egy levezőlapot egy számukra ismeretlen bostoni brókerhez a személyes ismerőseiken keresztül.



HOW TO TAKE PART IN THIS STUDY

1. ADD YOUR NAME TO THE ROSTER AT THE BOTTOM OF THIS SHEET, so that the next person who receives this letter will know who it came from.
2. DETACH ONE POSTCARD. FILL IT AND RETURN IT TO HARVARD UNIVERSITY. No stamp is needed. The postcard is very important. It allows us to keep track of the progress of the folder as it moves toward the target person.
3. IF YOU KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, MAIL THIS FOLDER DIRECTLY TO HIM (HER). Do this only if you have previously met the target person and know each other on a first name basis.
4. IF YOU DO NOT KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, DO NOT TRY TO CONTACT HIM DIRECTLY. INSTEAD, MAIL THIS FOLDER (POST CARDS AND ALL) TO A PERSONAL ACQUAINTANCE WHO IS MORE LIKELY THAN YOU TO KNOW THE TARGET PERSON. You may send the folder to a friend, relative or acquaintance, but it must be someone you know on a first name basis.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

A kísérlet eredményei:

- Meglepő módon a levelezőlapok egy része eljutott a célszemélyhez, átlagosan nagyjából 6 lépés alatt.
- Ez alapján $\langle \ell \rangle$ durva becslése az USA-ban 6, ami több nagyságrenddel kisebb mint a populáció mérete...
- Ez egy kis világ.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

A kísérlet eredményei:

- Meglepő módon a levelezőlapok egy része eljutott a célszemélyhez, átlagosan nagyjából 6 lépés alatt.
- Ez alapján $\langle \ell \rangle$ durva becslése az USA-ban 6, ami több nagyságrenddel kisebb mint a populáció mérete...
- Ez egy kis világ.

Stanley Milgram kísérlete (1967)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

A kísérlet eredményei:

- Meglepő módon a levelezőlapok egy része eljutott a célszemélyhez, átlagosan nagyjából 6 lépés alatt.
- Ez alapján $\langle \ell \rangle$ durva becslése az USA-ban 6, ami több nagyságrenddel kisebb mint a populáció mérete...
- Ez egy kis világ.

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma?

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma?

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$
- harmadik szomszédok száma?

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$
- harmadik szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^3$

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$
- harmadik szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^3$
- etc.

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$
- harmadik szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^3$
- etc.
- $\langle d \rangle^{(\ell)} \simeq N$

$\langle \ell \rangle$ becslése egy véletlen gráf esetén

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Tegyük fel, hogy:

- N kellően nagy,
- viszont $\langle d \rangle$ kicsi, azaz a hálózat ritka.

Válasszunk véletlenszerűen egy csúcsot:

- első szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle$
- másodsomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^2$
- harmadik szomszédok száma $\simeq \langle d \rangle^3$
- etc.
- $\langle d \rangle^{(\ell)} \simeq N$
- Ennélfogva

$$\langle \ell \rangle \simeq \frac{\ln N}{\ln \langle d \rangle}$$

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

A kis világ tulajdonság

- Egy hálózat kis világ tulajdonságú ha $\langle \ell \rangle \sim \ln N$,
(vagy $\langle \ell \rangle$ még lassabban nő).

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság

A VALÓS RENDSZEREKET REPREZENTÁLÓ HÁLÓZATOK KIS VILÁG TULAJDONSÁGÚAK!

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999	1
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001	2
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998	3
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b	4
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b	5
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c	6
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b	7
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	8
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000	12
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000	13
Words, cooccurrence	460,902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001	14
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001	15
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998	17

- Többnyire az összes véletlen-gráf-modell szintén kis világ tulajdonságú.
- Példa NEM kis világ tulajdonságú hálózatra?

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság

A VALÓS RENDSZEREKET REPREZENTÁLÓ HÁLÓZATOK KIS VILÁG TULAJDONSÁGÚAK!

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999	1
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001	2
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998	3
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b	4
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b	5
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c	6
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b	7
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	8
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000	12
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000	13
Words, cooccurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001	14
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001	15
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998	17

- Többnyire az összes véletlengráf-modell szintén kis világ tulajdonságú.
- Példa NEM kis világ tulajdonságú hálózatra?

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság

A VALÓS RENDSZEREKET REPREZENTÁLÓ HÁLÓZATOK KIS VILÁG TULAJDONSÁGÚAK!

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999	1
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001	2
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998	3
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b	4
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b	5
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c	6
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b	7
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	8
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000	12
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000	13
Words, cooccurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001	14
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001	15
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998	17

- Többnyire az összes véletlengráf-modell szintén kis világ tulajdonságú.
- Példa NEM kis világ tulajdonságú hálózatra?

A kis világ tulajdonság

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalálhatóság

A VALÓS RENDSZEREKET REPREZENTÁLÓ HÁLÓZATOK KIS VILÁG TULAJDONSÁGÚAK!

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999	1
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001	2
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998	3
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b	4
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b	5
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c	6
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b	7
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	8
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000	12
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000	13
Words, cooccurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001	14
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001	15
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998	17

- Többnyire az összes véletlengráf-modell szintén kis világ tulajdonságú.
- Példa NEM kis világ tulajdonságú hálózatra: szabályos rácsok.

A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb.
szomszédságait:

A kis világ tulajdonság

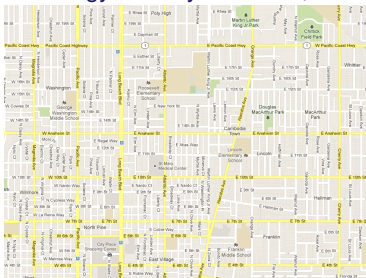
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

● egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

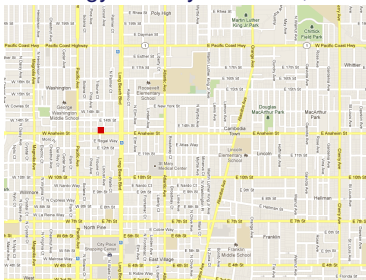
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

● egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

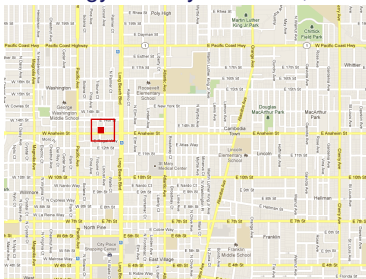
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

● egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

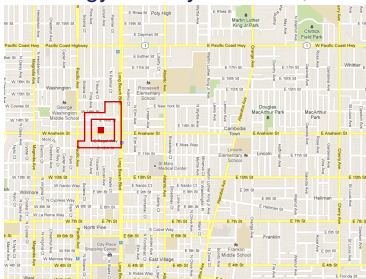
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

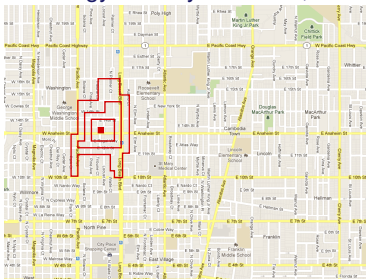
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

● egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

Következmények

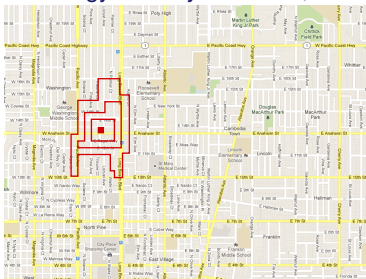
Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

• egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:

- a befoglalt épületek száma nagyjából $n \sim \ell^d$ szerint nő, ($n \sim \ell^2$ szerint egy városban)



Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség

A kis világ tulajdonság

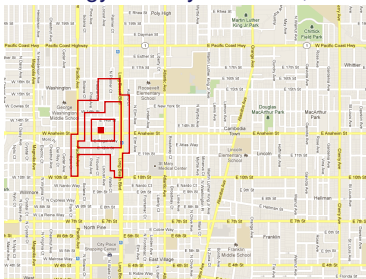
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

• egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



- a befoglalt épületek száma nagyjából $n \sim \ell^d$ szerint nő, ($n \sim \ell^2$ szerint egy városban)
- ahhoz, hogy „lefedjük” az egész rendszert, $\ell \sim N^{1/d}$ lépés kell.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggetlenség

A kis világ tulajdonság

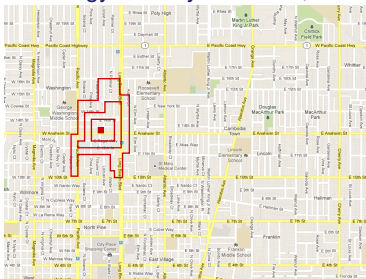
Következmények

Hálózatok I.

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcstól első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

• egy szabályos rácson, mint pl. egy városban:



- a bennfoglalt épületek száma nagyjából $n \sim \ell^d$ szerint nő, ($n \sim \ell^2$ szerint egy városban)
- ahhoz, hogy „lefedjük” az egész rendszert, $\ell \sim N^{1/d}$ lépés kell.
- (pl. egy 100.000 épületből álló város esetén $\ell \simeq 300!$)

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggetlenség

A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

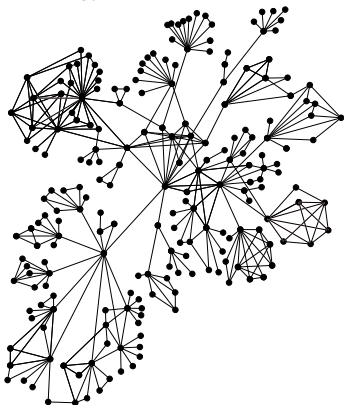
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggelenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

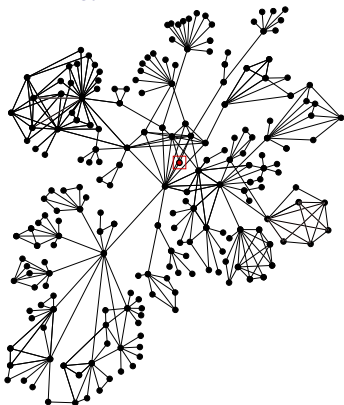
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

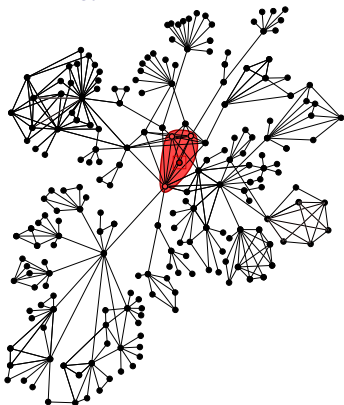
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggelenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

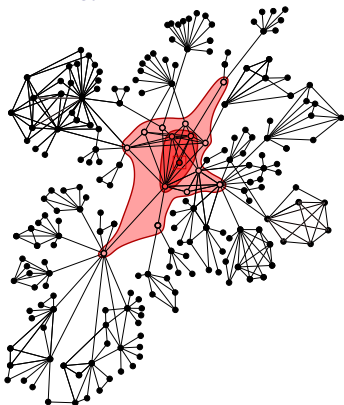
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggelenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

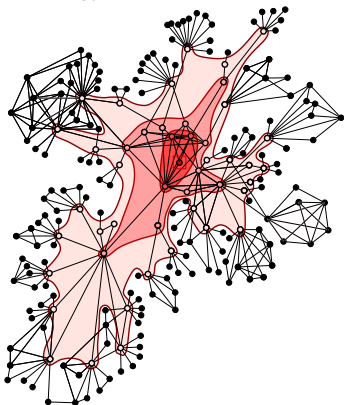
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

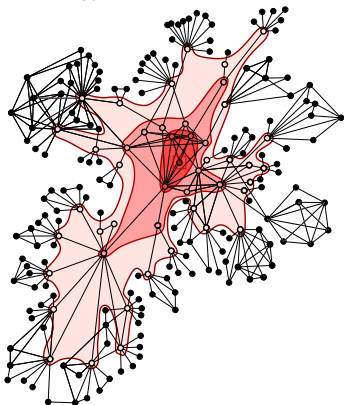
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skalafüggelenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



- a bennfoglalt csúcsok száma **exponenciálisan nő**, $n \sim \langle d \rangle^\ell$!

A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

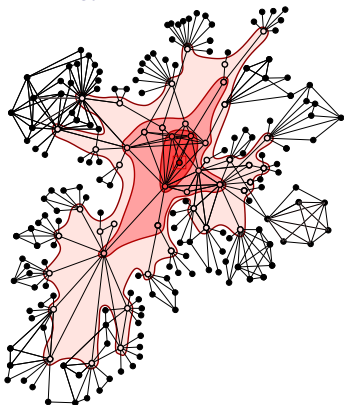
Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



- a bennfoglalt csúcsok száma **exponenciálisan nő**, $n \sim \langle d \rangle^\ell$!
- ahhoz, hogy „lefedjük” az egész rendszert, **csak néhány lépés kell!**

A kis világ tulajdonság

Következmények

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

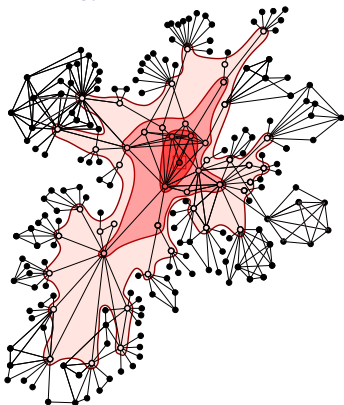
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Mik az $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ következményei?

→ Vizsgáljuk meg egy csúcs első-, másod-, harmad-, stb. szomszédságait:

- egy valós hálózat esetén, (pl. emberi kapcsolatok):



- a bennfoglalt csúcsok száma **exponenciálisan nő**, $n \sim \langle d \rangle^\ell$!
- ahhoz, hogy „lefedjük” az egész rendszert, **csak néhány lépés kell!**
- (pl. egy $N = 100.000$ csúcsból álló, $\langle d \rangle = 5$ átlagos fokszámú hálózat esetén $\ell \simeq 7!$)

Fokszámeloszlás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

**Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség**

Fokszámeloszlás

- A hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$, annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott csúcs fokszáma d .

- Egy N csúcsból álló hálózat esetén,

$$p(d) = \frac{N_d}{N},$$

ahol N_d a d fokszámú csúcsok száma.

- Máshogy megfogalmazva $p(d)$ szimplán a d fokszámú csúcsok aránya a hálózatban.

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Fokszámeloszlás

- A hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$, annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott csúcs fokszáma d .
- Egy N csúcsból álló hálózat esetén,

$$p(d) = \frac{N_d}{N},$$

ahol N_d a d fokszámú csúcsok száma.

- Máshogy megfogalmazva $p(d)$ szimplán a d fokszámú csúcsok aránya a hálózatban.

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózat kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

**Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség**

- Mi a fokszámeloszlás egy Erdős–Rényi-gráfban, mely N csúcsból áll és minden csúcspárt p valószínűséggel összekötünk?

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- Mi a fokszámeloszlás egy Erdős–Rényi-gráfban, mely N csúcsból áll és minden csúcspárt p valószínűséggel összekötünk?

- Az i és j csúcsok között:

$$\mathcal{P}(e_{ij} = 1) = p$$

$$\mathcal{P}(e_{ij} = 0) = 1 - p$$

(Ez a Bernoulli-eloszlás.)

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- Mi a fokszámeloszlás egy Erdős–Rényi-gráfban, mely N csúcsból áll és minden csúcspárt p valószínűséggel összekötünk?

- Az i és j csúcsok között:

$$\mathcal{P}(e_{ij} = 1) = p$$

$$\mathcal{P}(e_{ij} = 0) = 1 - p$$

(Ez a Bernoulli-eloszlás.)

- Egy adott csúcs $N - 1$ lehetséges szomszéd közül választhat, amik egymástól függetlenül kerülnek bekötésre,

→ $p(d)$ **binomiális eloszlású** lesz:

$$p(d) = \binom{N-1}{d} p^d (1-p)^{N-1-d}.$$

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

- Általában elhanyagoljuk a -1 -et:

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d},$$

- és az $N \rightarrow \infty$ határesetben a binomiális eloszlást Poisson-eloszlással közelítjük:

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d}$$

↓

$$p(d) \simeq \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}, \quad \langle d \rangle = Np$$

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalálátfüggetlenség

- Általában elhanyagoljuk a -1 -et:

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d},$$

- és az $N \rightarrow \infty$ határesetben a binomiális eloszlást Poisson-eloszlással közelítjük:

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d}$$

↓

$$p(d) \simeq \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}, \quad \langle d \rangle = Np$$

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással

$$\begin{aligned} p(d) &= \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{d!} \frac{\langle d \rangle^d}{N^d} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} \\ &= \frac{\langle d \rangle^d}{d!} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N}_{\approx e^{-\langle d \rangle}} \underbrace{\frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d}}_{\approx 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d}}_{\approx 1} \end{aligned}$$

Az utolsó két tényező 1-hez tart:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} = 1,$$

ezzel párhuzamosan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle d \rangle}$$

Ezek alapján,

$$p(d) \approx \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}.$$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalafüggetlenség

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással

$$\begin{aligned} p(d) &= \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{d!} \frac{\langle d \rangle^d}{N^d} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} \\ &= \underbrace{\frac{\langle d \rangle^d}{d!} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N}_{\approx e^{-\langle d \rangle}} \underbrace{\frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d}}_{\approx 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d}}_{\approx 1} \end{aligned}$$

Az utolsó két tényező 1-hez tart:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} = 1,$$

ezzel párhuzamosan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle d \rangle}$$

Ezek alapján,

$$p(d) \approx \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}.$$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással

$$\begin{aligned} p(d) &= \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{d!} \frac{\langle d \rangle^d}{N^d} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} \\ &= \underbrace{\frac{\langle d \rangle^d}{d!} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N}_{\approx e^{-\langle d \rangle}} \underbrace{\frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d}}_{\approx 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d}}_{\approx 1} \end{aligned}$$

Az utolsó két tényező 1-hez tart:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} = 1,$$

ezzel párhuzamosan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle d \rangle}$$

Ezek alapján,

$$p(d) \approx \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}.$$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skaláláfüggetlenség

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással

$$\begin{aligned} p(d) &= \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{d!} \frac{\langle d \rangle^d}{N^d} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} \\ &= \frac{\langle d \rangle^d}{d!} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N}_{\approx e^{-\langle d \rangle}} \underbrace{\frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d}}_{\approx 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d}}_{\approx 1} \end{aligned}$$

Az utolsó két tényező 1-hez tart:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-d+1)}{N^d} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^{-d} = 1,$$

ezzel párhuzamosan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle d \rangle}$$

Ezek alapján,

$$p(d) \approx \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}.$$

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

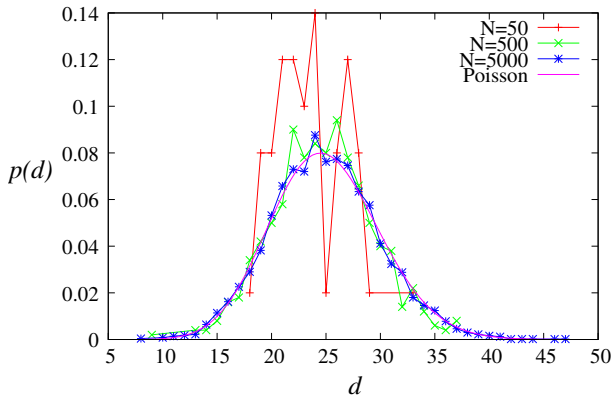
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skalálátfüggelenség



Az Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlása

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás

alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági

mátrix

Ritka gráfok

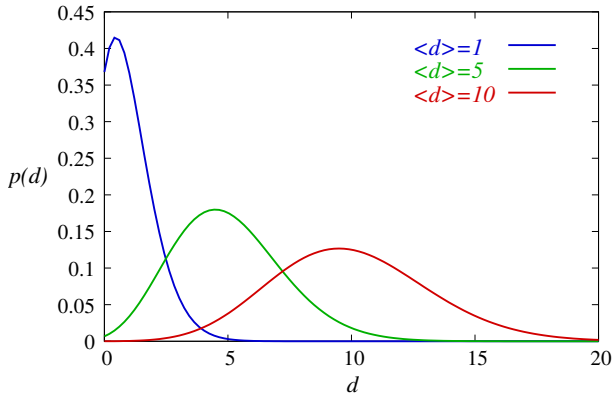
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és

skalafüggelenség



$p(d)$ valódi rendszereket reprezentáló hálózatokban

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

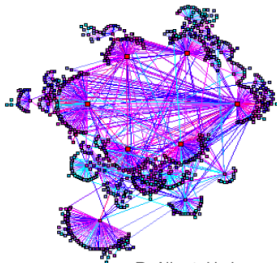
Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

Nodes: **WWW documents**

Links: **URL links**

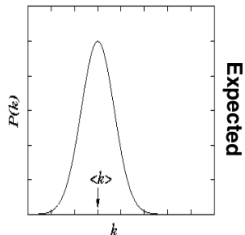
Over 3 billion documents

ROBOT: collects all URL's found in a document and follows them recursively

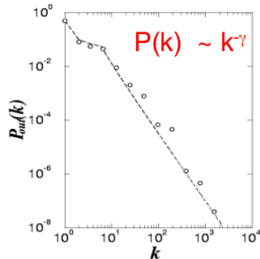


R. Albert, H. Jeong, A-L Barabasi, *Nature*, 401 130 (1999).

(Barabási A.-L. előlái alapján)



Expected



Found

Skálafüggetlen és Poisson-eloszlás

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeli áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

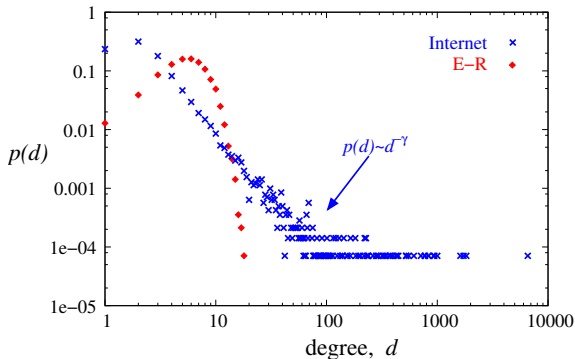
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Az Internet fokszámeloszlása (AS szinten), összehasonlítva egy vele azonos méretű és sűrűségű Erdős–Rényi-gráf fokszámeloszlásával:



$p(d)$ valódi rendszereket reprezentáló hálózatokban

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség

Mit várunk?



R. Albert, H. Jeong, A-L Barabasi, *Nature*, 401 130 (1999).

(Barabási A.-L. föltái alapján)

$p(d)$ valódi rendszereket reprezentáló hálózatokban

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

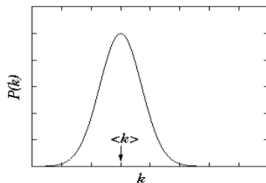
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

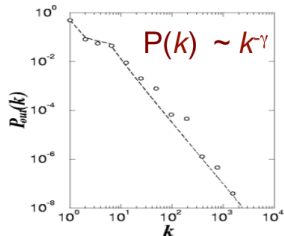
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggelenség

Exponential Network



Scale-free Network



R. Albert, H. Jeong, A-L Barabasi, *Nature*, 401 130 (1999).

(Barabási A.-L. föltái alapján)

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

Skálafüggetlen hálózatok

- Egy hálózat **skálafüggetlen** ha a fokszámeloszlása a nagy fokszámok tartományán hatványszerűen csökken, azaz skálázó.

$$p(d) \sim d^{-\gamma}.$$

- A γ exponens az ún. fokszám lecsengési exponens vagy fokszám exponens.

Alapvető eltérések a skálafüggetlen és a Poisson-eloszlás között!

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeli áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

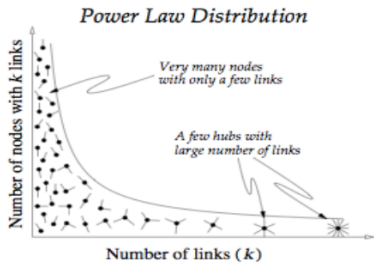
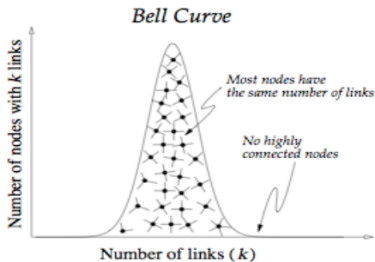
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszám-eloszlás és
skálafüggetlenség



(Barabási A.-L. fóliái alapján)

Alapvető eltérések a skálafüggetlen és a Poisson-eloszlás között!

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatkutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

- **„HUB”-ok!**
 - $\langle d \rangle \ll d$.
 - Emiatt **nincs értelme** „tipikus” fokszámról beszélni.
 - A fokszámeloszlás nagyon **inhomogén**.

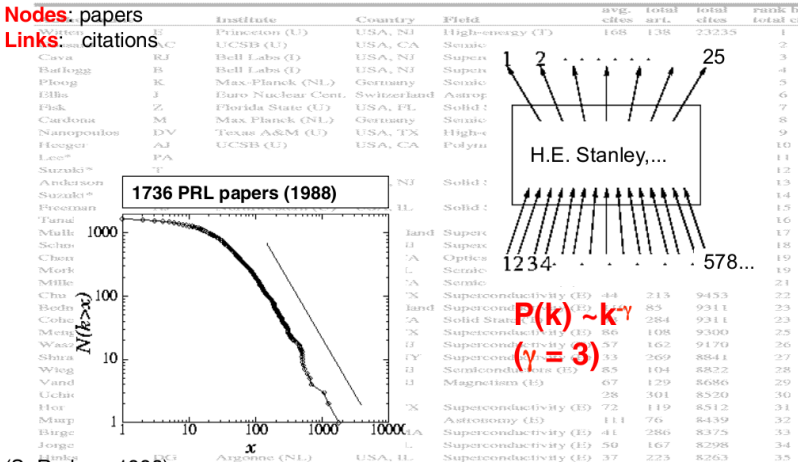
Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Out of over 500,000 Examined
(see <http://www.ssl.nrl.gov>)

Nodes: papers

Links: citations



(S. Redner, 1998)

(Barabási A.-L. föliái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

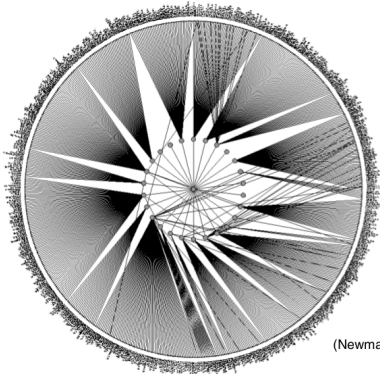
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és
skálafüggetlenség

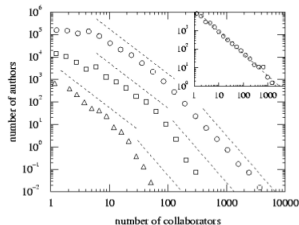
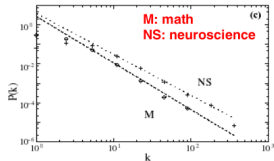
Nodes: scientist (authors)

Links: joint publication



(Newman, 2000, Barabasi et al 2001)

(Barabási A.-L. föliái alapján)



Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

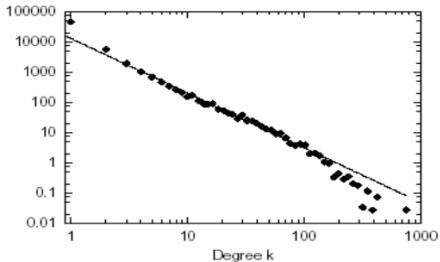
Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Nodes: online user
Links: email contact

Kiel University log files
112 days, $N=59,912$ nodes



(Barabási A.-L. fóliái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

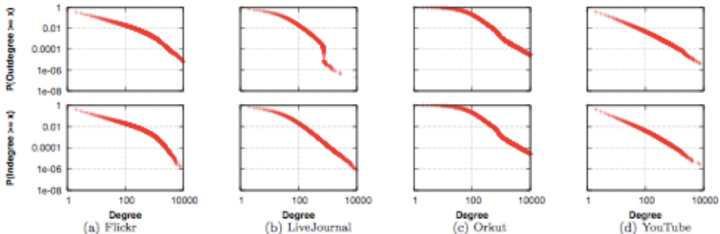
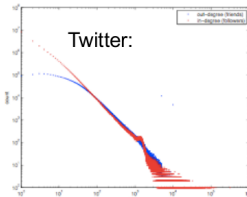
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

Nodes: online user
Links: email contact

All distributions show a fat-tail behavior:
there are orders of magnitude spread in the degrees

Alan Mislove, Measurement and Analysis of Online Social Networks



(Barabási A.-L. előlái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

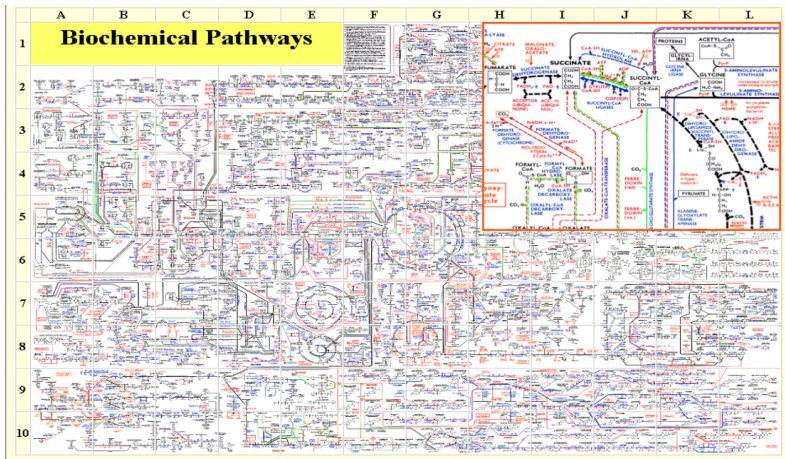
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámelosztás és skálafüggetlenség



(Barabási A.-L. föliái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

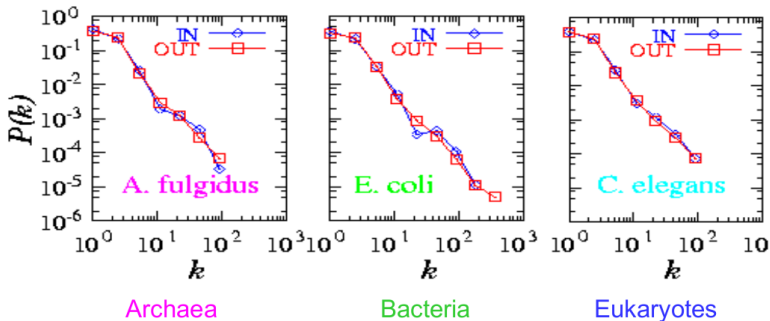
Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség



Organisms from all three domains of life are **scale-free!**

$$P_{in}(k) \approx k^{-2.2}$$

$$P_{out}(k) \approx k^{-2.2}$$

H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, and A.L. Barabasi, *Nature*, 407 651 (2000)

(Barabási A.-L. előlái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

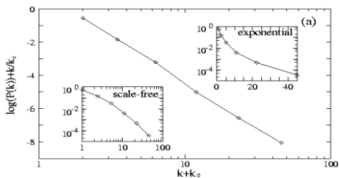
Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

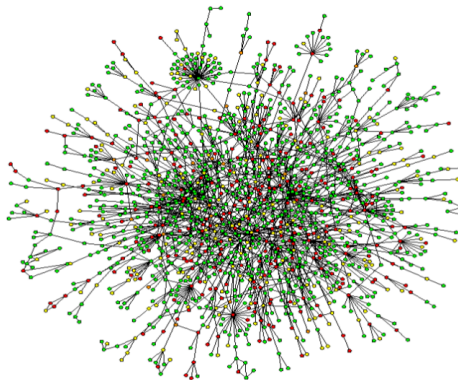
Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség

Nodes: proteins
Links: physical interactions-binding



$$P(k) \sim (k + k_0)^{-\gamma} \exp\left(-\frac{k + k_0}{k_r}\right)$$



(Barabási A.-L. föliái alapján)

Skálafüggetlen hálózatok mindenütt

Hálózatok I.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

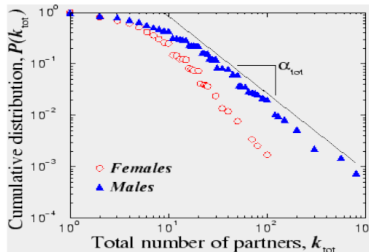
Fokszámeloszlás és skálafüggetlenség



(Barabási A.-L. előlái alapján)

Nodes: people (Females; Males)

Links: sexual relationships



4781 Swedes; 18-74;
59% response rate.

Liljeros et al. Nature 2001

Skálafüggetlen hálózatok

Mért γ exponensek

Hálózatok I.

Skálafüggetlen fokszámeloszlás: $p(d) \sim d^{-\gamma}$.

Bevezetés

Mi az, hogy hálózat?

Történeti áttekintés

A hálózatok kutatás
alkalmazásai

Gráfok

Gráf típusok

Szomszédsági
mátrix

Ritka gráfok

Hálózatjellemzők

Csúcsok jellemzése

Kis világ tulajdonság

Fokszámeloszlás és
skálafüggetlenség

Network	Size	$\langle k \rangle$	κ	γ_{out}	γ_{in}	ℓ_{real}	ℓ_{rand}	ℓ_{pow}	Reference
WWW	325, 729	4.51	900	2.45	2.1	11.2	8.32	4.77	Albert, Jeong, Barabási 1999
WWW	4×10^7	7		2.38	2.1				Kumar <i>et al.</i> 1999
WWW	2×10^8	7.5	4, 000	2.72	2.1	16	8.85	7.61	Broder <i>et al.</i> 2000
WWW, site	260, 000				1.94				Huberman, Adamic 2000
Internet, domain*	3, 015 - 4, 389	3.42 - 3.76	30 - 40	2.1 - 2.2	2.1 - 2.2	4	6.3	5.2	Faloutsos 1999
Internet, router*	3, 888	2.57	30	2.48	2.48	12.15	8.75	7.67	Faloutsos 1999
Internet, router*	150, 000	2.66	60	2.4	2.4	11	12.8	7.47	Govindan 2000
Movie actors*	212, 250	28.78	900	2.3	2.3	4.54	3.65	4.01	Barabási, Albert 1999
Coauthors, SPIRES*	56, 627	173	1, 100	1.2	1.2	4	2.12	1.95	Newman 2001b,c
Coauthors, neuro.*	209, 293	11.54	400	2.1	2.1	6	5.01	3.86	Barabási <i>et al.</i> 2001
Coauthors, math*	70, 975	3.9	120	2.5	2.5	9.5	8.2	6.53	Barabási <i>et al.</i> 2001
Sexual contacts*	2810			3.4	3.4				Liljeros <i>et al.</i> 2001
Metabolic, E. coli	778	7.4	110	2.2	2.2	3.2	3.32	2.89	Jeong <i>et al.</i> 2000
Protein, S. cerev.*	1870	2.39		2.4	2.4				Mason <i>et al.</i> 2000
Ythan estuary*	134	8.7	35	1.05	1.05	2.43	2.26	1.71	Montoya, Solé 2000
Silwood park*	154	4.75	27	1.13	1.13	3.4	3.23	2	Montoya, Solé 2000
Citation	783, 339	8.57			3				Redner 1998
Phone-call	53×10^6	3.16		2.1	2.1				Aiello <i>et al.</i> 2000
Words, cooccurrence*	460, 902	70.13		2.7	2.7				Cancho, Solé 2001
Words, synonyms*	22, 311	13.48		2.8	2.8				Yook <i>et al.</i> 2001

A valódi rendszereket reprezentáló hálózatok

- **RITKÁK:**

$$\langle d \rangle \ll N,$$

- **MAGASAN KLASZTEREZETTEK:**

$\langle C \rangle$ sokkal nagyobb mint egy ugyanolyan méretű és sűrűségű E-R gráfban,

- **KIS VILÁG TULAJDONSÁGÚAK:**

$$\langle \ell \rangle \sim \ln N,$$

- **SKÁLAFÜGGETLENEK:**

$$p(k) \sim k^{-\gamma}$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

HÁLÓZATOK II: MODELLEK

**Erdős–Rényi-modell, Watts–Strogatz-modell,
Barabási–Albert-modell, konfigurációs modell,
determinisztikus skálafüggetlen modellek,
gráfsokaságok, topologikus fázisátalakulások.**

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Prefer. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások



AZ ERDŐS–RÉNYI-MODELL

Az Erdős–Rényi-modell (1959)

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

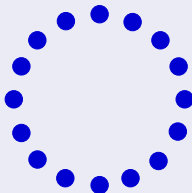
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-modell (klasszikus véletlen gráf)

Erdős Pál és Rényi Alfréd:

- N csúcs,
- páronként függetlenül p valószínűséggel összekötjük őket.



- Ezt szokták $G(N, p)$ modellnek is hívni.
- A $G(N, M)$ modell nagyon hasonló: M darab élt kell egymástól függetlenül véletlenszerűen szétosztani N csúcs között.

Az Erdős–Rényi-modell (1959)

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínűségi hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Preferenciális Kapcsolás

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

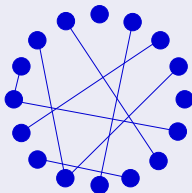
Szabadenergia

Topológikus fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-modell (klasszikus véletlen gráf)

Erdős Pál és Rényi Alfréd:

- N csúcs,
- páronként függetlenül p valószínűséggel összekötjük őket.



- Ezt szokták $G(N, p)$ modellnek is hívni.
- A $G(N, M)$ modell nagyon hasonló: M darab élt kell egymástól függetlenül véletlenszerűen szétosztani N csúcs között.

Az Erdős–Rényi-modell (1959)

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínűségi hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Preferenciális Kapcsolás

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

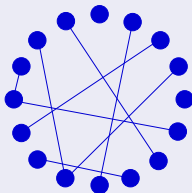
Szabadenergia

Topológiai fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-modell (klasszikus véletlen gráf)

Erdős Pál és Rényi Alfréd:

- N csúcs,
- páronként függetlenül p valószínűséggel összekötjük őket.



- Ezt szokták $G(N, p)$ modellnek is hívni.
- A $G(N, M)$ modell nagyon hasonló: M darab élt kell egymástól függetlenül véletlenszerűen szétosztani N csúcs között.

Az Erdős–Rényi-modell (1959)

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínűségi hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Preferenciális Kapcsolás

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

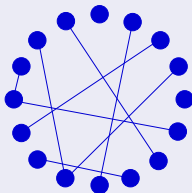
Szabadenergia

Topológiai fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-modell (klasszikus véletlen gráf)

Erdős Pál és Rényi Alfréd:

- N csúcs,
- páronként függetlenül p valószínűséggel összekötjük őket.



- Ezt szokták $G(N, p)$ modellnek is hívni.
- A $G(N, M)$ modell nagyon hasonló: M darab élt kell egymástól függetlenül véletlenszerűen szétosztani N csúcs között.

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság?

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság.

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság.
- átlagos fokszám?

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság.
- átlagos fokszám: $\langle d \rangle = (N - 1)p \simeq Np$,

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság.
- átlagos fokszám: $\langle d \rangle = (N - 1)p \simeq Np$,
- élek várható száma?

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az Erdős–Rényi-gráf tulajdonságai:

- kis világ tulajdonság.
- átlagos fokszám: $\langle d \rangle = (N - 1)p \simeq Np$,
- élek várható száma: $M = pN(N - 1)/2$.

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Már korábban levezettük,

$$p(d) = \binom{N-1}{d} p^d (1-p)^{N-1-d} \simeq \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d} \quad (\text{binomiális})$$

$$\simeq \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle} \quad (\text{Poisson})$$

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

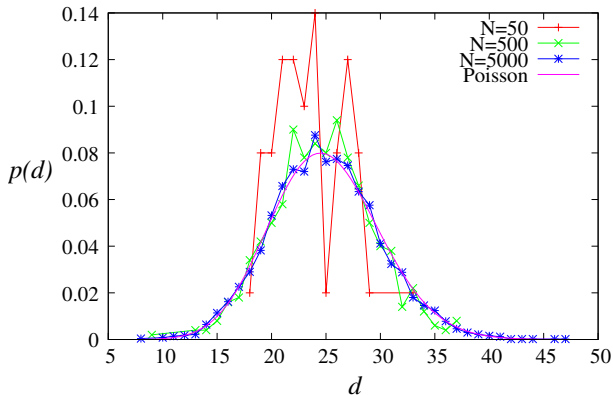
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



Az E-R gráf fokszámeloszlása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klusterizettség

Konfigurációs
modell

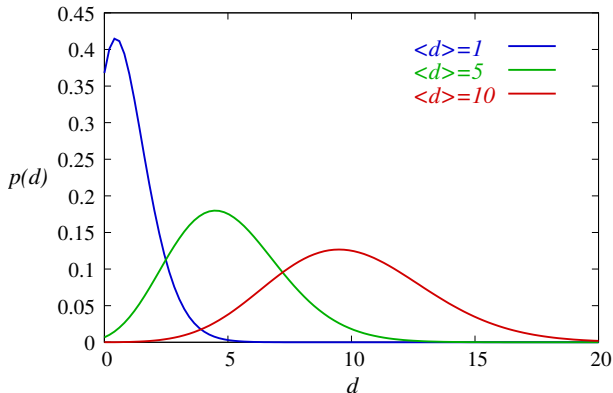
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi a $p(d)$ szórásnégyzete?

Az eloszlás binomiális,

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d},$$

→ a várható érték és a szórásnégyzet

$$\langle d \rangle = Np,$$

$$\langle d^2 \rangle = Np(1-p) + p^2 N^2,$$

$$\text{Var}(d) = \langle d^2 \rangle - \langle d \rangle^2 = Np(1-p),$$

$$\sigma(d) = \sqrt{\text{Var}(d)} = \sqrt{Np(1-p)}.$$

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi a $p(d)$ szórásnégyzete?

Az eloszlás binomiális,

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d},$$

→ a várható érték és a szórásnégyzet

$$\langle d \rangle = Np,$$

$$\langle d^2 \rangle = Np(1-p) + p^2 N^2,$$

$$\text{Var}(d) = \langle d^2 \rangle - \langle d \rangle^2 = Np(1-p),$$

$$\sigma(d) = \sqrt{\text{Var}(d)} = \sqrt{Np(1-p)}.$$

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi történik az $N \rightarrow \infty$ határesetben egy „realisztikus” E-R gráfban? (Egy olyan E-R gráfban, amivel egy valós rendszert szeretnénk modellezni).

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi történik az $N \rightarrow \infty$ határesetben egy „realisztikus” E-R gráfban? (Egy olyan E-R gráfban, amivel egy valós rendszert szeretnénk modellezni).

Ritkának kell maradnia! $\rightarrow \langle d \rangle = \text{const.},$

$$\left. \begin{array}{l} N \rightarrow \infty \\ \langle d \rangle = Np \rightarrow \text{const.} \end{array} \right\} \Rightarrow p \rightarrow 0$$

$$\text{Var}(d) = Np(1 - p) = \langle d \rangle (1 - p)$$

$$\rightarrow \text{Var}(d) \rightarrow \langle d \rangle = \text{const.}$$

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi történik az $N \rightarrow \infty$ határesetben egy „realisztikus” E-R gráfban? (Egy olyan E-R gráfban, amivel egy valós rendszert szeretnénk modellezni).

Ritkának kell maradnia! $\rightarrow \langle d \rangle = \text{const.},$

$$\left. \begin{array}{l} N \rightarrow \infty \\ \langle d \rangle = Np \rightarrow \text{const.} \end{array} \right\} \Rightarrow p \rightarrow 0$$

$$\text{Var}(d) = Np(1 - p) = \langle d \rangle (1 - p)$$

$$\rightarrow \text{Var}(d) \rightarrow \langle d \rangle = \text{const.}$$

A szórásnégyzet **konstans**, ami **elhanyagolhatóvá válik a rendszermérethez képest!**

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Folytonos formalizmusban:

$$P(d > d_0) = \int_{d_0}^{\infty} p(z) dz = \int_{d_0}^{\infty} \frac{\langle d \rangle^z}{z!} e^{-\langle d \rangle} dz.$$

- Pl. ha $\langle d \rangle = 10$:
 - egy $d \geq 20$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 20) = 0.00158826$,
 - egy $d \leq 1$ csúcs valószínűsége $P(d \leq 1) = 0.00049$,
 - egy $d \geq 100$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 100) = 1.79967152 \times 10^{-13}$.
- A szociológusok szerint egy tipikus személy $d \sim 1000$ ismerőssel rendelkezik.
 - annak valószínűsége, hogy találunk valakit, akinél $d \geq 2000$, az nagyjából $P(d \geq 2000) \simeq 10^{-27}$!
 - Egy ilyen teljesen véletlenszerű társadalom nagyon homogén lenne, kilógó egyének teljes hiányával!

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Folytonos formalizmusban:

$$P(d > d_0) = \int_{d_0}^{\infty} p(z) dz = \int_{d_0}^{\infty} \frac{\langle d \rangle^z}{z!} e^{-\langle d \rangle} dz.$$

- Pl. ha $\langle d \rangle = 10$:

- egy $d \geq 20$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 20) = 0.00158826$,
- egy $d \leq 1$ csúcs valószínűsége $P(d \leq 1) = 0.00049$,
- egy $d \geq 100$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 100) = 1.79967152 \times 10^{-13}$.

- A szociológusok szerint egy tipikus személy $d \sim 1000$ ismerőssel rendelkezik.

→ annak valószínűsége, hogy találunk valakit, akinél $d \geq 2000$, az nagyjából $P(d \geq 2000) \simeq 10^{-27}$!

→ Egy ilyen teljesen véletlenszerű társadalom nagyon homogén lenne, kilógó egyének teljes hiányával!

Az E-R gráf fokszámeloszlása

Variancia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Folytonos formalizmusban:

$$P(d > d_0) = \int_{d_0}^{\infty} p(z) dz = \int_{d_0}^{\infty} \frac{\langle d \rangle^z}{z!} e^{-\langle d \rangle} dz.$$

- Pl. ha $\langle d \rangle = 10$:

- egy $d \geq 20$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 20) = 0.00158826$,
- egy $d \leq 1$ csúcs valószínűsége $P(d \leq 1) = 0.00049$,
- egy $d \geq 100$ csúcs valószínűsége $P(d \geq 100) = 1.79967152 \times 10^{-13}$.

- A szociológusok szerint egy tipikus személy $d \sim 1000$ ismerőssel rendelkezik.

→ annak valószínűsége, hogy találunk valakit, akinél $d \geq 2000$, az nagyjából $P(d \geq 2000) \simeq 10^{-27}$!

→ Egy ilyen teljesen véletlenszerű társadalom nagyon homogén lenne, kilógó egyének teljes hiányával!

Az E-R gráf klaszterezettsége

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mekkora a $\langle C \rangle$ egy E-R gráfban?

Az E-R gráf klaszterezettsége

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mekkora a $\langle C \rangle$ egy E-R gráfban?
- Az E-R gráf nagyon demokratikus, ezért minden csúcshoz egyenlő a klaszterezettségi együtthatója, $C_i \simeq \langle C \rangle$.
- C_i úgy is interpretálható, mint az i szomszédai közt húzódó élek valószínűsége.
- Mivel az E-R gráf élei egymástól függetlenek, az i szomszédai közt is p valószínűséggel keletkezik él.
- Ennélfogva az E-R gráfban $\langle C \rangle = p$.

Egy hálózat komponensei

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skáláfüggetlen
modell

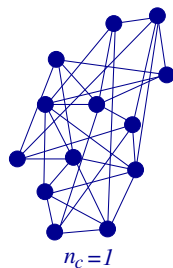
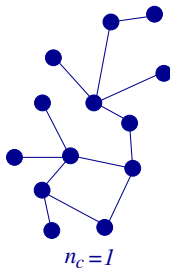
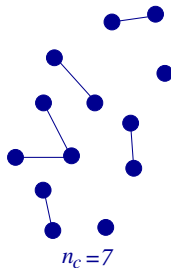
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Komponens

Egy komponens olyan maximális részgráf, melyen belül bármely csúcsból el lehet jutni bármely más csúcsba az éleken keresztül.



Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

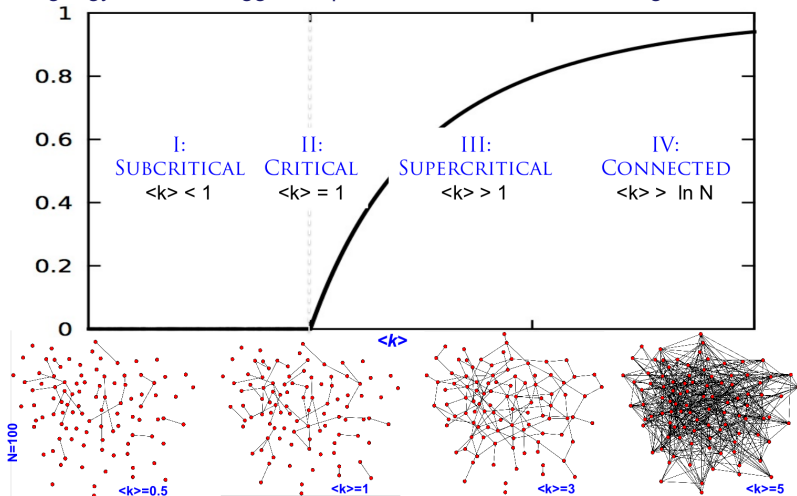
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

A legnagyobb összefüggő komponens relatív mérete az E-R gráfban:



(Barabási A.-L. föliáról)

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**
 - Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:
 - vagy nem létezik

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS** **BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:
 - vagy nem létezik \rightarrow ennek valószínűsége = $1 - p$,

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:
 - vagy nem létezik \rightarrow ennek valószínűsége = $1 - p$,
 - vagy j sincs benne az óriás komponensben

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS** **BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:
 - vagy nem létezik → ennek valószínűsége = $1 - p$,
 - vagy j sincs benne az óriás komponensben → ennek valószínűsége = pu

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:

- vagy nem létezik → ennek valószínűsége = $1 - p$,

- vagy j sincs

 benne az óriás → ennek valószínűsége = pu
 komponensben

- Annak valószínűsége, i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben

$$(1 - p + pu)^{N-1}$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.
- Tegyük fel, hogy i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben, és vizsgáljuk meg az i és j közt húzódó élt:

- vagy nem létezik → ennek valószínűsége = $1 - p$,

- vagy j sincs

benne az óriás → ennek valószínűsége = pu
komponensben

- Annak valószínűsége, i **NINCS BENNE** a legnagyobb komponensben

$$(1 - p + pu)^{N-1}$$

- Másfelől ez a valószínűség definíció szerint u , ami alapján

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u = (1 - p(1 - u))^{N-1} = \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right)^{N-1}$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u = (1 - p(1 - u))^{N-1} = \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right)^{N-1}$$

$$\ln u = (N-1) \ln \left[1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right]$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u = (1 - p(1 - u))^{N-1} = \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right)^{N-1}$$

$$\ln u = (N-1) \ln \left[1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right]$$

$$\ln u \approx -(N-1) \left[\frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right]$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u = (1 - p(1 - u))^{N-1} = \left(1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right)^{N-1}$$

$$\ln u = (N-1) \ln \left[1 - \frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right]$$

$$\ln u \approx -(N-1) \left[\frac{\langle d \rangle}{N-1}(1 - u)\right]$$

$$u \approx e^{-\langle d \rangle(1-u)}$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u \approx e^{-(d)(1-u)}.$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u \approx e^{-(d)(1-u)}.$$

$$S \approx 1 - e^{-(d)S}.$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hogyan lehetne meghatározni a legnagyobb komponens $S = \frac{s_1}{N}$ relatív méretét?**

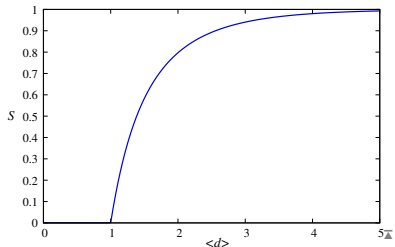
- Jelölje $u = 1 - S$ azon csúcsok hányadát melyek **NEM** részei a legnagyobb komponensnek.

$$u = (1 - p + pu)^{N-1}.$$

$$u \approx e^{-(d)(1-u)}.$$

$$S \approx 1 - e^{-(d)S}.$$

Ezt az egyenletet
numerikusan meg lehet
oldani tetszőleges $\langle d \rangle$
mellet, mely a következő
eredményeket adja S -re:



Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Hol van a kritikus pont?**
 - A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

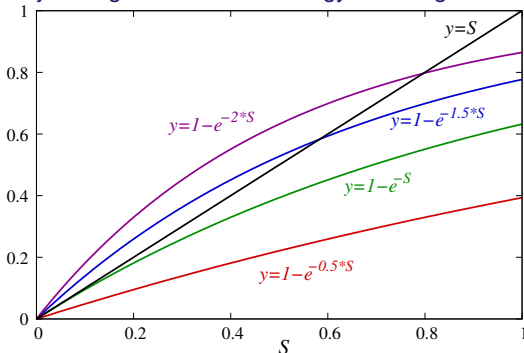
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.
- Oldjuk meg az $S = 1 - e^{-(d)S}$ egyenletet „grafikusan”:



Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

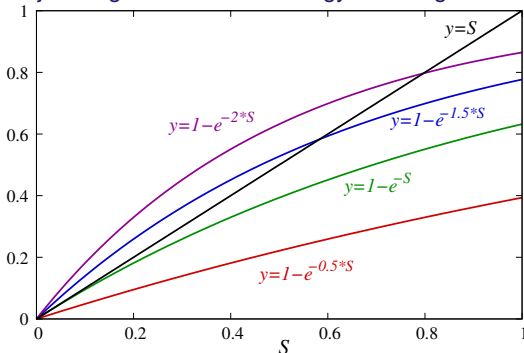
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.
- Oldjuk meg az $S = 1 - e^{-(d)S}$ egyenletet „grafikusan”:



→ Mi a nemtriviális megoldás létezésének feltétele?

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

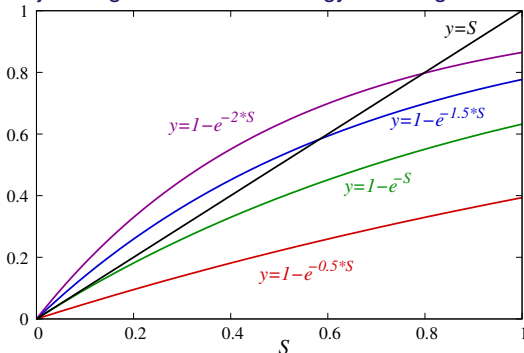
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.
- Oldjuk meg az $S = 1 - e^{-(d)S}$ egyenletet „grafikusan”:



→ Mi a nemtriviális megoldás létezésének feltétele?

$$\frac{d}{dS} (1 - e^{-(d)S}) \geq 1 \Big|_{S=0}$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.

$$\frac{d}{dS} (1 - e^{-(d)S}) \geq 1 \Big|_{S=0}$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.

$$\frac{d}{dS} (1 - e^{-(d)S}) \geq 1 \Big|_{S=0}$$

$$\langle d \rangle e^{-(d)S} \Big|_{S=0} \geq 1$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.

$$\frac{d}{dS} (1 - e^{-(d)S}) \geq 1 \Big|_{S=0}$$

$$\langle d \rangle e^{-(d)S} \Big|_{S=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \langle d \rangle \geq 1$$

Perkoláció az E-R gráfban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hol van a kritikus pont?

- A kritikus pont ott van ahol S nagyobb lesz mint nulla.

$$\frac{d}{dS} (1 - e^{-(d)S}) \geq 1 \Big|_{S=0}$$

$$\langle d \rangle e^{-(d)S} \Big|_{S=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \langle d \rangle \geq 1$$

- **A kritikus pont $\langle d \rangle = 1$ -nél van, és $\langle d \rangle \geq 1$ esetén az E-R gráf tartalmaz egy óriás komponenst.**

E-R gráf és valós hálózatok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

**E-R gráf és valós
hálózatok**

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Mennyire írja le jól az E-R gráf a valódi rendszereket reprezentáló hálózatok tulajdonságait?

E-R gráf és valós hálózatok

Kis világ tulajdonság

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-

modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000
Words, cooccurrence	460,902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998

E-R gráf és valós hálózatok

Kis világ tulajdonság

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és

renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

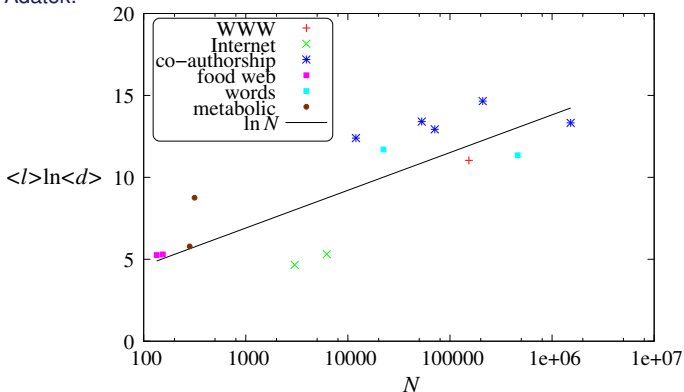
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Jóslat:

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle d \rangle} \rightarrow \langle \ell \rangle \ln \langle d \rangle \approx \ln N$$

Adatok:



E-R gráf és valós hálózatok

Klaszterezettség

Hálózatok II.

Erdős–Rényi- modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz- modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert- modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skáláfüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference
WWW, site level, undir.	153, 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic 1999
Internet, domain level	3015 - 6209	3.52 - 4.11	3.7 - 3.76	6.36 - 6.18	0.18 - 0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> 2001
Movie actors	225, 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts, Strogatz 1998
LANL coauthorship	52, 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman 2001a,b
MEDLINE coauthorship	1, 520, 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman 2001a,b
SPIRES coauthorship	56, 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman 2001a,b,c
NCSTRL coauthorship	11, 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman 2001a,b
Math coauthorship	70, 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
Neurosci. coauthorship	209, 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> 2001
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner, Fell 2000
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner, Fell 2000
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya, Solé 2000
Silwood park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya, Solé 2000
Words, cooccurrence	460,902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Cancho, Solé 2001
Words, synonyms	22, 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> 2001
Power grid	4, 941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts, Strogatz 1998
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts, Strogatz 1998

E-R gráf és valós hálózatok

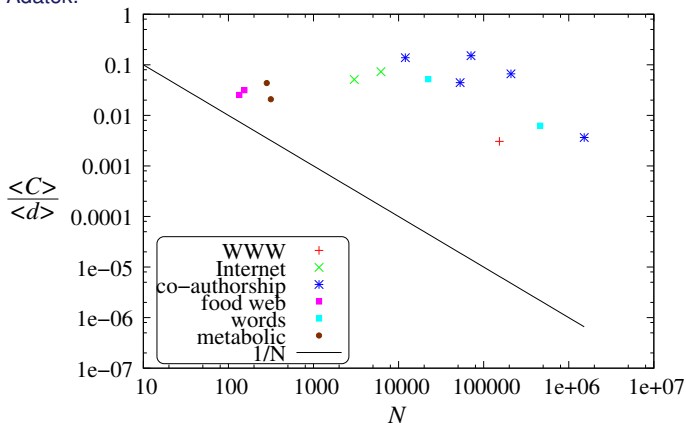
Klaszterezettség

Hálózatok II.

Jóslat:

$$\langle C \rangle \approx \frac{\langle d \rangle}{N} \rightarrow \frac{\langle C \rangle}{\langle d \rangle} \approx \frac{1}{N}$$

Adatok:



Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

E-R gráf és valós hálózatok

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

**E-R gráf és valós
hálózatok**

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

E-R gráf és valós hálózatok

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

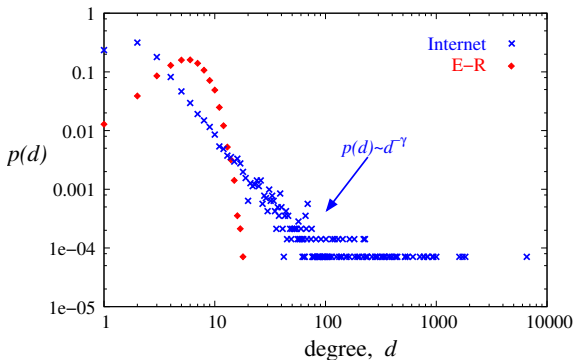
Topologikus
fázisátalakulások

Jóslat:

$$p(d) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d} \simeq \frac{\langle d \rangle^d}{d!} e^{-\langle d \rangle}$$

Adatok:

$$p(d) \sim d^{-\gamma}$$



E-R gráf és valós hálózatok

Összefoglalás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Az E-R gráf és a valódi rendszereket leíró hálózatok összehasonlítása:

-Kis világ tulajdonság? **OK**

-magas klaszterezettség? **NEM!**

-skálafüggetlenség? **NEM!**

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A WATTS–STROGATZ-MODELL

A Watts–Strogatz-modell

Motiváció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Duncan Watts and Steven H. Strogatz, (1998):

Hogyan lehetne egy egyszerű véletlengráf-modellt alkotni úgy, hogy a **kis világ tulajdonság** és a **magas klaszterezettség** egyszerre teljesüljenek?

A Watts–Strogatz-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

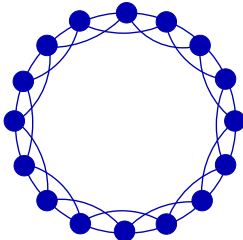
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell (1998)

- Egy szabályos gyűrűből indulunk, melyben minden csúcs össze van kötve a gyűrű mentén számolt q első szomszédaival.
- Minden élt β valószínűséggel átkötünk egy véletlenszerűen választott csúcsra.



S. Watts and D. H. Strogatz, *Nature* **393**,409 (1998)

A Watts–Strogatz-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

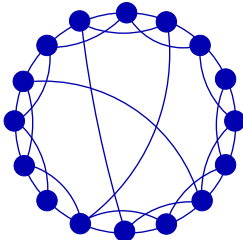
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell (1998)

- Egy szabályos gyűrűből indulunk, melyben minden csúcs össze van kötve a gyűrű mentén számolt q első szomszédaival.
- Minden élt β valószínűséggel átkötünk egy véletlenszerűen választott csúcsra.



S. Watts and D. H. Strogatz, *Nature* **393**,409 (1998)

A Watts–Strogatz-modell

Extrém határesetek

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- $\beta = 0$:

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{N}{4q}$$

$$\langle C \rangle = C = \frac{q(q-1)\frac{3}{2}}{q(2q-1)} = \frac{3q-3}{4q-2}$$

- $\beta = 1$: olyan mint az E-R-modell, $G(N,M)$ verzió.

$$\langle \ell \rangle \sim \log N$$

$$\langle C \rangle = p_{ER} = \frac{2q}{N-1}$$

A Watts–Strogatz-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció
E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus
Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és preferenciális kapcsolás
Klaszterezettség

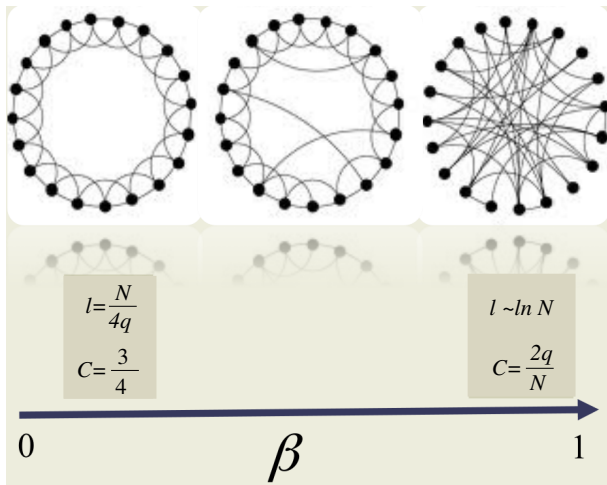
Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus fázisátalakulások



A Watts–Strogatz-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

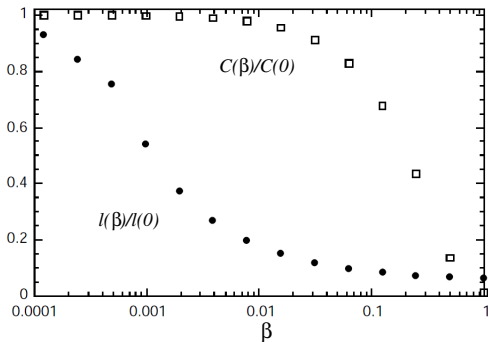
Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



- Egy viszonylag széles β tartományban a C még relatíve magas, míg ℓ már kellően alacsony!

→ **MAGAS KLASZTEREZETTSÉG és KIS VILÁG!**

A Watts–Strogatz-modell

Miért működik?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-model

Miért működik?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Take home message:

Viszonylag kicsi véletlenszerűség már elég ahhoz, hogy fellépjen a kis világ effektus, viszont nagyon sok átkötés kell ahhoz, hogy leromboljuk a klaszterezettséget.

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

**Skálázás és
renormálás**

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

**Skálázás és
renormálás**

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma?

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

**Skálázás és
renormálás**

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

**Skálázás és
renormálás**

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Mi történik, ha $\beta qN \ll 1$?

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.
- Mi történik, ha $\beta qN \gg 1$?

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.
- Ha $\beta qN \gg 1$, akkor sok a véletlenszerűen átkötött él és $\langle \ell \rangle \sim \ln N$.

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.
- Ha $\beta qN \gg 1$, akkor sok a véletlenszerűen átkötött él és $\langle \ell \rangle \sim \ln N$.
- Mi az egyszerű tipp az átalakulás „kritikus” pontjára ?

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
- Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.
- Ha $\beta qN \gg 1$, akkor sok a véletlenszerűen átkötött él és $\langle \ell \rangle \sim \ln N$.
- Az átalakulás valahol $\beta_c qN = 1$ környékén történik.

Mikor lép fel a kis világ effektus?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Véletlenszerűen átkötött élek száma: βqN .
 - Ha $\beta qN \ll 1$, akkor nincsenek véletlenszerűen átkötött élek és $\langle \ell \rangle \sim N$.
 - Ha $\beta qN \gg 1$, akkor sok a véletlenszerűen átkötött él és $\langle \ell \rangle \sim \ln N$.
 - Az átalakulás valahol $\beta_c qN = 1$ környékén történik.
- Az $\langle \ell \rangle$ skálázásából kiindulva megvizsgáljuk, hogy egy egyszerű „renormálási” transzformáció mit ad pontosan a kritikus pontra.

A Watts–Strogatz-modell

Skálázás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skáláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Alternatív megfogalmazása a problémának: rögzített β mellett változtatjuk N -et.

→ Ilyenkor $\langle \ell \rangle$ a következő módon skálázik N -el:

- kis N : $\beta q N \ll 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim N$,
- nagy N : $\beta q N \gg 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim \ln N$.

- A két eltérő skálázást összefoglalhatjuk egy képletbe egy univerzális $f(x)$ függvény segítségével a következő módon:

$$\ell = N \cdot f(N/N_c), \quad f(x) = \begin{cases} \text{const.} & x \ll 1 \\ \ln(x)/x & x \gg 1 \end{cases}$$

- (Itt nem részletezett) numerikus szimulációk alapján $N_c \sim \beta^{-\tau}$,

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

Skálázás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Alternatív megfogalmazása a problémának: rögzített β mellett változtatjuk N -et.

→ Ilyenkor $\langle \ell \rangle$ a következő módon **skálázik N -el**:

- kis N : $\beta q N \ll 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim N$,
- nagy N : $\beta q N \gg 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim \ln N$.

- A két eltérő skálázást összefoglalhatjuk egy képletbe egy univerzális $f(x)$ függvény segítségével a következő módon:

$$\ell = N \cdot f(N/N_c), \quad f(x) = \begin{cases} \text{const.} & x \ll 1 \\ \ln(x)/x & x \gg 1 \end{cases}$$

- (Itt nem részletezett) numerikus szimulációk alapján $N_c \sim \beta^{-\tau}$,

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

Skálázás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Alternatív megfogalmazása a problémának: rögzített β mellett változtatjuk N -et.

→ Ilyenkor $\langle \ell \rangle$ a következő módon **skálázik N -el**:

- kis N : $\beta q N \ll 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim N$,
 - nagy N : $\beta q N \gg 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim \ln N$.
- A két eltérő skálázást összefoglalhatjuk egy képletbe egy univerzális $f(x)$ függvény segítségével a következő módon:

$$\ell = N \cdot f(N/N_c), \quad f(x) = \begin{cases} \text{const.} & x \ll 1 \\ \ln(x)/x & x \gg 1 \end{cases}$$

- (Itt nem részletezett) numerikus szimulációk alapján $N_c \sim \beta^{-\tau}$,

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

Skálázás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Alternatív megfogalmazása a problémának: rögzített β mellett változtatjuk N -et.

→ Ilyenkor $\langle \ell \rangle$ a következő módon **skálázik N -el**:

- kis N : $\beta q N \ll 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim N$,
 - nagy N : $\beta q N \gg 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim \ln N$.
- A két eltérő skálázást összefoglalhatjuk egy képletbe egy univerzális $f(x)$ függvény segítségével a következő módon:

$$\ell = N \cdot f(N/N_c), \quad f(x) = \begin{cases} \text{const.} & x \ll 1 \\ \ln(x)/x & x \gg 1 \end{cases}$$

- (Itt nem részletezett) numerikus szimulációk alapján $N_c \sim \beta^{-\tau}$,

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

Skálázás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Alternatív megfogalmazása a problémának: rögzített β mellett változtatjuk N -et.

→ Ilyenkor $\langle \ell \rangle$ a következő módon **skálázik N -el**:

- kis N : $\beta q N \ll 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim N$,
 - nagy N : $\beta q N \gg 1 \rightarrow \langle \ell \rangle \sim \ln N$.
- A két eltérő skálázást összefoglalhatjuk egy képletbe egy univerzális $f(x)$ függvény segítségével a következő módon:

$$\ell = N \cdot f(N/N_c), \quad f(x) = \begin{cases} \text{const.} & x \ll 1 \\ \ln(x)/x & x \gg 1 \end{cases}$$

- (Itt nem részletezett) numerikus szimulációk alapján $N_c \sim \beta^{-\tau}$,

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A Watts–Strogatz-modell „renormálása”:

- Egy kiinduló W-S gráfról áttérünk egy kisebb méretű W-S gráfra:
 - a gyűrű mentén „összejtünk” szomszédos csúcsokat,
 - az eredményül kapott csúcsok megöröklik az eredeti csúcsok éleit.
- Természetesen az eredményül kapott W-S gráf paraméterei különböznek az eredeti gráfétól, viszont mindkettőre igaz, hogy

$$\langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A Watts–Strogatz-modell „renormálása”:

- Egy kiinduló W-S gráfról áttérünk egy kisebb méretű W-S gráfra:

- a gyűrű mentén „összejtünk” szomszédos csúcsokat,
- az eredményül kapott csúcsok megőrik az eredeti csúcsok éleit.

- Természetesen az eredményül kapott W-S gráf paraméterei különböznek az eredeti gráfétól, viszont mindkettőre igaz, hogy

$$\langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A Watts–Strogatz-modell „renormálása”:

- Egy kiinduló W-S gráfról áttérünk egy kisebb méretű W-S gráfra:

- a gyűrű mentén „összejtünk” szomszédos csúcsokat,
- az eredményül kapott csúcsok megöröklük az eredeti csúcsok éleit.

- Természetesen az eredményül kapott W-S gráf paraméterei különböznek az eredeti gráfétól, viszont mindkettőre igaz, hogy

$$\langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A Watts–Strogatz-modell „renormálása”:

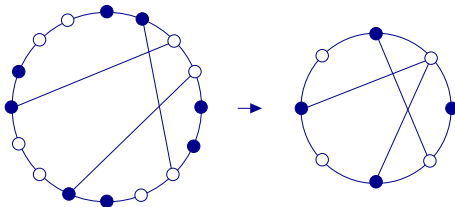
- Egy kiinduló W-S gráfról áttérünk egy kisebb méretű W-S gráfra:
 - a gyűrű mentén „összejtünk” szomszédos csúcsokat,
 - az eredményül kapott csúcsok megöröklik az eredeti csúcsok éleit.
- Természetesen az eredményül kapott W-S gráf paraméterei különböznek az eredeti gráfétól, viszont mindkettőre igaz, hogy

$$\langle \ell \rangle = N \cdot f(\beta^\tau N).$$

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q = 1$, a következő módon „renormálunk”:



Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

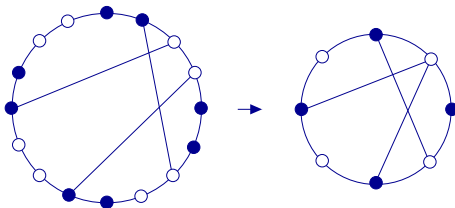
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q = 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = q, \quad N' = N/2, \quad \beta' = 2\beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle / 2,$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

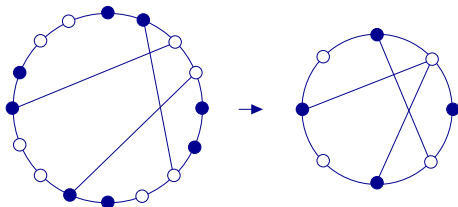
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q = 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = q, \quad N' = N/2, \quad \beta' = 2\beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle / 2,$$

$$\frac{\ell'}{N'} = \frac{\ell}{N} \rightarrow f([\beta']^T N') = f(\beta^T N)$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

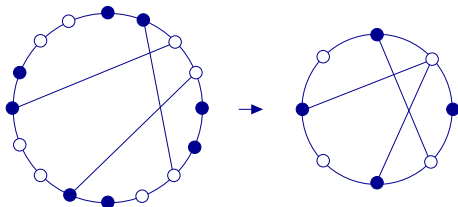
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q = 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = q, \quad N' = N/2, \quad \beta' = 2\beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle / 2,$$

$$\frac{\ell'}{N'} = \frac{\ell}{N} \rightarrow f([\beta']^T N') = f(\beta^T N)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^T = \frac{N}{N'} \rightarrow \tau = \frac{\ln(N/N')}{\ln(\beta'/\beta)} = 1.$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és preferenciális kapcsolat

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

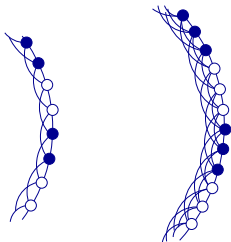
Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:



Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

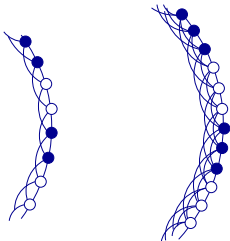
Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:

$$q' = 1, \quad N' = N/q, \quad \beta' = q^2 \beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle,$$



Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

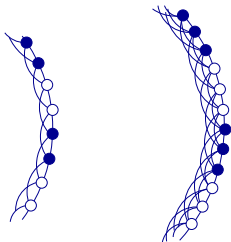
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$\begin{aligned} q' &= 1, \quad N' = N/q, \quad \beta' = q^2 \beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle, \\ \rightarrow \quad \langle \ell \rangle &= \frac{N}{q} f(\beta q N) \quad \left(\langle \ell \rangle = N \cdot f(N/N_c) \right) \end{aligned}$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

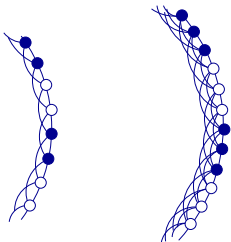
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = 1, \quad N' = N/q, \quad \beta' = q^2 \beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle,$$

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = \frac{N}{q} f(\beta q N) \quad (\langle \ell \rangle = N \cdot f(N/N_c))$$

$$\rightarrow N_c = \frac{1}{\beta q}$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}} \tanh^{-1} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

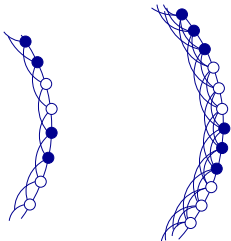
Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = 1, \quad N' = N/q, \quad \beta' = q^2\beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle,$$

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = \frac{N}{q} f(\beta q N) \quad (\langle \ell \rangle = N \cdot f(N/N_c))$$

$$\rightarrow N_c = \frac{1}{\beta q}$$

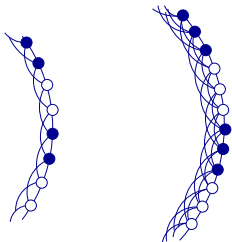
$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}} \tanh^{-1} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

→ Az átalakulás $\beta q N = 1$ -nél történik!

A Watts–Strogatz-modell

„Renormálás”

Ha $q > 1$, a következő módon „renormálunk”:



$$q' = 1, \quad N' = N/q, \quad \beta' = q^2\beta, \quad \langle \ell' \rangle = \langle \ell \rangle,$$

$$\rightarrow \langle \ell \rangle = \frac{N}{q} f(\beta q N) \quad (\langle \ell \rangle = N \cdot f(N/N_c))$$

$$\rightarrow N_c = \frac{1}{\beta q}$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}} \tanh^{-1} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

→ Az átalakulás $\beta q N = 1$ -nél történik!

→ Az $\ell(\beta)$ görbék **egy univerzális görbére ejtethők össze minden W-S-gráf esetén!**

$$\langle \ell \rangle = \frac{N}{q} f(\beta q N).$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Watts–Strogatz-modell

Data collapse

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

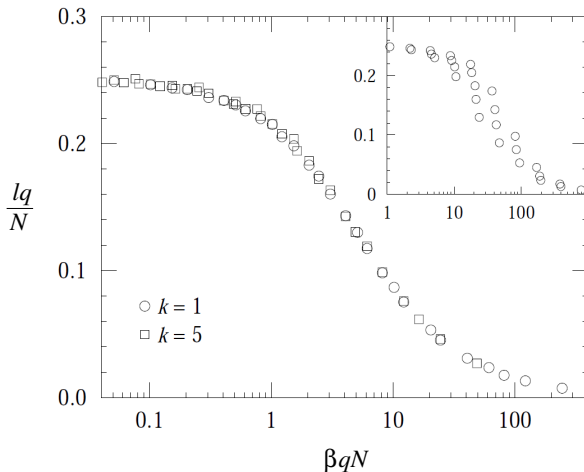
Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások



M. E. J. Newman and D. J. Watts, *Physics Letters A* **263**, 341–346 (1999)

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

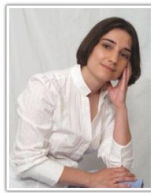
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A BARABÁSI–ALBERT-MODELL

Gráfmodellek és valós hálózatok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

	E-R	W-S
- Kis világ tulajdonság ?	OK	OK
- Magas klaszterezettség ?	NEM!	OK
- Skálafüggetlenség?	NEM!	NEM!

Gráfmodellek és valós hálózatok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

	E-R	W-S
- Kis világ tulajdonság ?	OK	OK
- Magas klaszterezettség ?	NEM!	OK
- Skálafüggetlenség?	NEM!	NEM!

Hogyan lehetne egy **skálafüggetlen** véletlen gráfot generálni?

A Barabási–Albert-modell

Motiváció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Barabási Albert-László és Albert Réka (1999):

- skálafüggetlen véletlen gráf,
- egy egyszerű mechanizmus, mely ad egy lehetséges magyarázatot a skálafüggetlen $p(d)$ kialakulására.

A Barabási–Albert-modell

Növekvő hálózatok...

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Erdős–Rényi-modell: rögzített N , (statikus)
- Watts–Strogatz-modell: rögzített N , (statikus)
- Valódi rendszerek?

A Barabási–Albert-modell

Növekvő hálózatok...

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Preferenciális kapcsolás

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

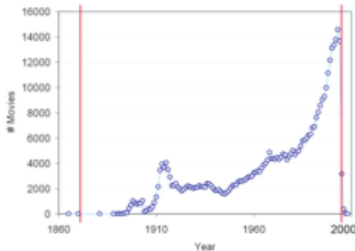
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

Actor network

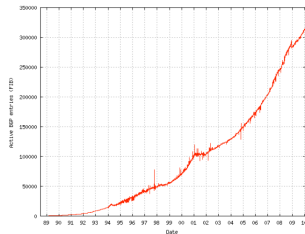


Number of movies in IMDB

Herr II, Bruce W., Ke, Weimao, Hardy, Elisha, and Bömer, Katy. (2007) Movies and Actors: Mapping the Internet Movie Database. In Conference Proceedings of 11th Annual Information Visualization International Conference (IV 2007), Zurich, Switzerland, July 4-6, pp. 465-469.

(Barabási A.-L. főliájáról)

Internet



Growth of the Internet routing table

<http://www.trainsignaltraining.com/ccna-ipv6>

A Barabási–Albert-modell

Növekvő hálózatok...

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

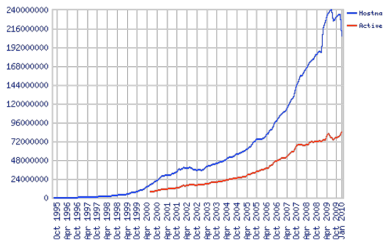
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

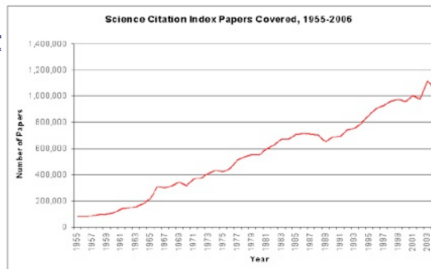
WWW



<http://website101.com/define-ecommerce-web-terms-definitions/>

(Barabási A.-L. főleíról)

Scientific Publications



http://www.kk.org/thetechnium/archives/2008/10/the_expansion_o.php

A Barabási–Albert-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

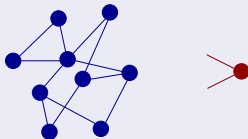
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Barabási–Albert-modell

- Növekvő modell: minden időlépésben **egy új csúcs** kötődik be a hálózatba **m új éllel**.



- Az új éllek másik végét a **preferenciális kapcsolódási szabály** alapján kötjük be:

$$\mathcal{P}(i \text{ választása}) \equiv \mathcal{P}_i \sim d_i,$$

azaz a csúcs választásának valószínűsége **arányos** a fokszámával.

A Barabási–Albert-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

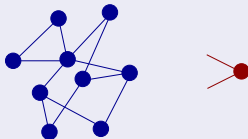
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A Barabási–Albert-modell

- Növekvő modell: minden időlépésben **egy új csúcs** kötődik be a hálózatba **m új éllel**.



- Az új éllek másik végét a **preferenciális kapcsolódási szabály** alapján kötjük be:

$$\mathcal{P}(i \text{ választása}) \equiv \mathcal{P}_i \sim d_i,$$

azaz a csúcs választásának valószínűsége **arányos** a fokszámával.

A Barabási–Albert-modell

Átlagtér közelítés

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Nagy t esetén a csúcsok és élek számát közelíthetjük úgy mint

$$\begin{aligned}N &\simeq t, \\M &\simeq mt.\end{aligned}$$

- Az i választásának valószínűsége:

$$\mathcal{P}_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

→ A d_i kis változásának „átlagtér” közelítése egy időlépés alatt:

$$\frac{\Delta d_i}{\Delta t} \simeq m\mathcal{P}_i \rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = m \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

Mivel a foksámok összege: $\sum_j d_j = 2M = 2mt$,

$$\rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t}.$$

A Barabási–Albert-modell

Átlagtér közelítés

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Nagy t esetén a csúcsok és élek számát közelíthetjük úgy mint

$$N \simeq t, \\ M \simeq mt.$$

- Az i választásának valószínűsége:

$$\mathcal{P}_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

→ A d_i kis változásának „átlagtér” közelítése egy időlépés alatt:

$$\frac{\Delta d_i}{\Delta t} \simeq m\mathcal{P}_i \rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = m \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

Mivel a fokszámok összege: $\sum_j d_j = 2M = 2mt$,

$$\rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t}.$$

A Barabási–Albert-modell

Átlagtér közelítés

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Nagy t esetén a csúcsok és élek számát közelíthetjük úgy mint

$$\begin{aligned}N &\simeq t, \\M &\simeq mt.\end{aligned}$$

- Az i választásának valószínűsége:

$$\mathcal{P}_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

→ A d_i kis változásának „átlagtér” közelítése egy időlépés alatt:

$$\frac{\Delta d_i}{\Delta t} \simeq m\mathcal{P}_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{\partial t} = m \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

Mivel a fokszámok összege: $\sum_j d_j = 2M = 2mt$,

$$\rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t}.$$

A Barabási–Albert-modell

Átlagtér közelítés

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Nagy t esetén a csúcsok és élek számát közelíthetjük úgy mint

$$\begin{aligned}N &\simeq t, \\M &\simeq mt.\end{aligned}$$

- Az i választásának valószínűsége:

$$\mathcal{P}_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

→ A d_i kis változásának „átlagtér” közelítése egy időlépés alatt:

$$\frac{\Delta d_i}{\Delta t} \simeq m\mathcal{P}_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{\partial t} = m \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

Mivel a fokszámok összege: $\sum_j d_j = 2M = 2mt$,

$$\rightarrow \frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t}.$$

A Barabási–Albert-modell

Dinamikus exponens

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A diffe. megoldása:

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{d_i} = \frac{\partial t}{2t} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dd_i}{k_i} = \int \frac{dt}{2t}$$
$$\rightarrow \quad \ln d_i = \frac{1}{2} \ln t + \text{const.} \quad \rightarrow \quad d_i(t) = ct^{\frac{1}{2}}$$

- Hogyan lehet a c konstanst meghatározni?

A $t = t_i$ lépésnél, ahol i megjelenik a rendszerben: $d_i = m$, azaz

$$d_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Ennek alapján bármely csúcs fokszáma az időben $d(t) \sim t^\beta$ szerint nő, ahol $\beta = 1/2$ a **dinamikus exponens**.
(First mover advantage).

A Barabási–Albert-modell

Dinamikus exponens

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A diffe. megoldása:

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{d_i} = \frac{\partial t}{2t} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dd_i}{k_i} = \int \frac{dt}{2t}$$
$$\rightarrow \quad \ln d_i = \frac{1}{2} \ln t + \text{const.} \quad \rightarrow \quad d_i(t) = ct^{\frac{1}{2}}$$

- Hogyan lehet a c konstanst meghatározni?

A $t = t_i$ lépésnél, ahol i megjelenik a rendszerben: $d_i = m$, azaz

$$d_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Ennek alapján bármely csúcs fokszáma az időben $d(t) \sim t^\beta$ szerint nő, ahol $\beta = 1/2$ a **dinamikus exponens**.
(First mover advantage).

A Barabási–Albert-modell

Dinamikus exponens

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A diffe. megoldása:

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{d_i} = \frac{\partial t}{2t} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dd_i}{k_i} = \int \frac{dt}{2t}$$
$$\rightarrow \quad \ln d_i = \frac{1}{2} \ln t + \text{const.} \quad \rightarrow \quad d_i(t) = ct^{\frac{1}{2}}$$

- Hogyan lehet a c konstanst meghatározni?

A $t = t_i$ lépésnél, ahol i megjelenik a rendszerben: $d_i = m$, azaz

$$d_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Ennek alapján bármely csúcs fokszáma az időben $d(t) \sim t^\beta$ szerint nő, ahol $\beta = 1/2$ a **dinamikus exponens**.
(First mover advantage).

A Barabási–Albert-modell

Dinamikus exponens

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A diffe. megoldása:

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{d_i}{2t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial d_i}{d_i} = \frac{\partial t}{2t} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dd_i}{k_i} = \int \frac{dt}{2t}$$
$$\rightarrow \quad \ln d_i = \frac{1}{2} \ln t + \text{const.} \quad \rightarrow \quad d_i(t) = ct^{\frac{1}{2}}$$

- Hogyan lehet a c konstanst meghatározni?

A $t = t_i$ lépésnél, ahol i megjelenik a rendszerben: $d_i = m$, azaz

$$d_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Ennek alapján bármely csúcs fokszáma az időben $d(t) \sim t^\beta$ szerint nő, ahol $\beta = 1/2$ a **dinamikus exponens**.
(First mover advantage).

A Barabási–Albert-modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

● Hogyan lehet $d_i(t)$ alapján meghatározni a fokszámeloszlást?

→ A legegyszerűbb a kumulatív eloszlásfüggvényen keresztül.

A Barabási–Albert-modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az eloszlásfüggvény:

$$P(d) \equiv \mathcal{P}(d_i < d) = \mathcal{P}(m(t/t_i)^{1/2} < d) = \mathcal{P}(t/t_i < (d/m)^2) = \mathcal{P}(t_i/t > (m/d)^2).$$

- Az időlépések:

$$P(d) = 1 - \left(\frac{m}{d}\right)^2$$
$$\rightarrow p(d) = 2m^2 d^{-3}$$

A Barabási–Albert-modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az eloszlásfüggvény:

$$P(d) \equiv \mathcal{P}(d_i < d) = \mathcal{P}(m(t/t_i)^{1/2} < d) = \mathcal{P}(t/t_i < (d/m)^2) = \mathcal{P}(t_i/t > (m/d)^2).$$

- Az időlépések:



$$P(d) = 1 - \left(\frac{m}{d}\right)^2$$
$$\rightarrow p(d) = 2m^2 d^{-3}$$

A Barabási–Albert-modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az eloszlásfüggvény:

$$P(d) \equiv \mathcal{P}(d_i < d) = \mathcal{P}(m(t/t_i)^{1/2} < d) = \mathcal{P}(t/t_i < (d/m)^2) = \mathcal{P}(t_i/t > (m/d)^2).$$

- Az időlépések:



$$P(d) = 1 - \left(\frac{m}{d}\right)^2$$
$$\rightarrow \mathbf{p(d)} = \mathbf{2m^2 d^{-3}}$$

A Barabási–Albert-modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az eloszlásfüggvény:

$$P(d) \equiv \mathcal{P}(d_i < d) = \mathcal{P}(m(t/t_i)^{1/2} < d) = \mathcal{P}(t/t_i < (d/m)^2) = \mathcal{P}(t_i/t > (m/d)^2).$$

- Az időlépések:



$$P(d) = 1 - \left(\frac{m}{d}\right)^2$$

$$\rightarrow \mathbf{p(d)} = \mathbf{2m^2 d^{-3}}$$

- A fokszámeloszlás **SKÁLAFÜGGETLEN**, az exponens $\gamma = 3!$

A Barabási–Albert-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valószínű hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Preferenciális kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

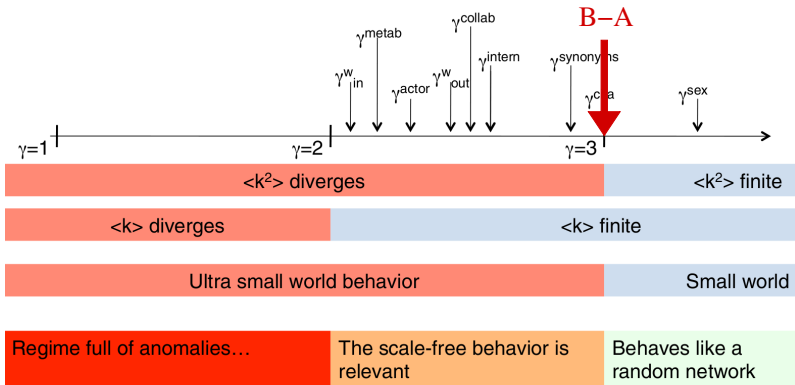
Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások



(Barabási A.-L. föliájáról)

Átlagos távolság skálafüggetlen hálózatokban

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

$$\langle \ell \rangle \sim \left\{ \begin{array}{ll} \text{const.} & \gamma \leq 2 \\ \frac{\ln \ln N}{\ln(\gamma-1)} & 2 < \gamma < 3 \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3 \\ \ln N & \gamma > 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ultra kis világ} \\ \\ \\ \text{Kis világ} \end{array}$$

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettségi együttható

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skáláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Mekkora $\langle C \rangle$ a B-A modellben?

- Az i csúcs fokszáma $d_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}$

→ Annak valószínűsége, hogy a $t = t_j$ lépésben születő j csúccsal összekapcsolódik:

$$\mathcal{P}(i-j) = m \frac{d_i}{2mt} = \frac{d_i}{2t} = \frac{m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}}{2t} = \frac{m}{2} (t_i t_j)^{-1/2}.$$

- A hálózatgenerálás végén $N = t$. Ekkor a k csúcs szomszédai közt várható élek száma:

$$\begin{aligned}n_k &= \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^N \sum_{t_j=1}^N \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{1}{2} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{m^3}{16} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j (t_k t_i)^{-1/2} (t_k t_j)^{-1/2} (t_i t_j)^{-1/2} \\&= \frac{m^3}{16 t_k} \int_1^N dt_i \frac{1}{t_i} \int_1^N dt_j \frac{1}{t_j} = \frac{m^3}{16 t_k} (\ln N)^2.\end{aligned}$$

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettségi együttható

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skáláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fizisátalakulások

Mekkora $\langle C \rangle$ a B-A modellben?

- Az i csúcs fokszáma $d_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}$

→ Annak valószínűsége, hogy a $t = t_j$ lépésben születő j csúccsal összekapcsolódik:

$$\mathcal{P}(i-j) = m \frac{d_i}{2mt} = \frac{d_i}{2t} = \frac{m\left(\frac{t_j}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{2t} = \frac{m}{2} (t_i t_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

- A hálózatgenerálás végén $N = t$. Ekkor a k csúcs szomszédai közt várható élek száma:

$$\begin{aligned}n_k &= \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^N \sum_{t_j=1}^N \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{1}{2} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{m^3}{16} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j (t_k t_i)^{-\frac{1}{2}} (t_k t_j)^{-\frac{1}{2}} (t_i t_j)^{-\frac{1}{2}} \\&= \frac{m^3}{16 t_k} \int_1^N dt_i \frac{1}{t_i} \int_1^N dt_j \frac{1}{t_j} = \frac{m^3}{16 t_k} (\ln N)^2.\end{aligned}$$

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettségi együttható

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skáláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Mekkora $\langle C \rangle$ a B-A modellben?

- Az i csúcs fokszáma $d_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}$

→ Annak valószínűsége, hogy a $t = t_j$ lépésben születő j csúccsal összekapcsolódik:

$$\mathcal{P}(i-j) = m \frac{d_i}{2mt} = \frac{d_i}{2t} = \frac{m\left(\frac{t_j}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{2t} = \frac{m}{2} (t_i t_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

- A hálózatgenerálás végén $N = t$. Ekkor a k csúcs szomszédai közt várható élek száma:

$$\begin{aligned}n_k &= \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^N \sum_{t_j=1}^N \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{1}{2} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j \mathcal{P}(k-i) \mathcal{P}(k-j) \mathcal{P}(i-j) \\&= \frac{m^3}{16} \int_1^N dt_i \int_1^N dt_j (t_k t_i)^{-\frac{1}{2}} (t_k t_j)^{-\frac{1}{2}} (t_i t_j)^{-\frac{1}{2}} \\&= \frac{m^3}{16 t_k} \int_1^N dt_i \frac{1}{t_i} \int_1^N dt_j \frac{1}{t_j} = \frac{m^3}{16 t_k} (\ln N)^2.\end{aligned}$$

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettségű együttható

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A lehetséges élek száma a k szomszédai között $t = N$ lépés után:

$$\frac{d_k(d_k - 1)}{2} \simeq \frac{d_k^2}{2} = \frac{1}{2} \left[m \left(\frac{t}{t_k} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \frac{m^2 N}{2t_k}$$

- Ez alapján k klaszterezettségű együtthatója:

$$C_k = \frac{m^3}{16t_k} (\ln N)^2 \frac{2t_k}{m^2 N} = \frac{m (\ln N)^2}{8N}.$$

- Mivel semmilyen extra feltételezésünk nem volt k -val kapcsolatban, és mivel C_k nem függ k -tól, a kapott eredmény a B-A modell átlagos klaszterezettsége:

$$C = \frac{m (\ln N)^2}{8N}.$$

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettség

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

$$\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \rightarrow \text{Ez jó vagy rossz?}$$

→ Hasonlítsuk össze az Erdős–Rényi-gráffal:

- Erdős–Rényi: $\langle C \rangle \approx \frac{\langle d \rangle}{N} \sim \frac{1}{N}$

- Barabási–Albert: $\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \sim \frac{(\ln N)^2}{N}$

Lassabban csökken N függvényében, viszont a valódi rendszereket leíró hálózatoknál egyáltalán nincs csökkenés:

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettség

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valódi
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

$$\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \rightarrow \text{Ez jó vagy rossz?}$$

→ Hasonlítsuk össze az Erdős–Rényi-gráffal:

- Erdős–Rényi: $\langle C \rangle \approx \frac{\langle d \rangle}{N} \sim \frac{1}{N}$

- Barabási–Albert: $\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \sim \frac{(\ln N)^2}{N}$

Lassabban csökken N függvényében, viszont a valódi rendszereket leíró hálózatoknál egyáltalán nincs csökkenés:

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettség

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

$$\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \rightarrow \text{Ez jó vagy rossz?}$$

→ Hasonlítsuk össze az Erdős–Rényi-gráffal:

- Erdős–Rényi: $\langle C \rangle \approx \frac{\langle d \rangle}{N} \sim \frac{1}{N}$

- Barabási–Albert: $\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \sim \frac{(\ln N)^2}{N}$

Lassabban csökken N függvényében, viszont a valódi rendszereket leíró hálózatoknál egyáltalán nincs csökkenés:

A Barabási–Albert-modell

Klaszterezettség

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valódi hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

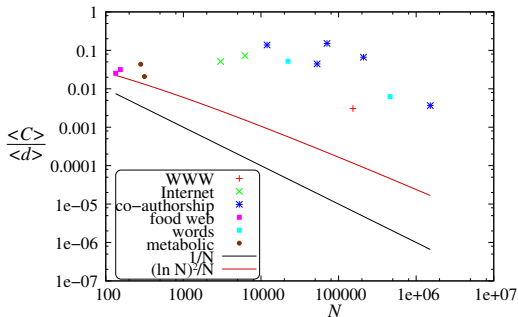
$$\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \rightarrow \text{Ez jó vagy rossz?}$$

→ Hasonlítsuk össze az Erdős–Rényi-gráffal:

- Erdős–Rényi: $\langle C \rangle \approx \frac{\langle d \rangle}{N} \sim \frac{1}{N}$

- Barabási–Albert: $\langle C \rangle = \frac{m(\ln N)^2}{8N} \sim \frac{(\ln N)^2}{N}$

Lassabban csökken N függvényében, viszont a valódi rendszereket leíró hálózatoknál egyáltalán nincs csökkenés:



A Barabási–Albert-modell

Összefoglalás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Növekedés és preferenciális kapcsolódás,**

- Dinamikus exponens: $d(t) \sim t^\beta$, $\beta = \frac{1}{2}$,

- **SKÁLAFÜGGETLEN:** $p(d) \sim d^{-3}$, $\gamma = 3$,

- Kis világ: $\langle \ell \rangle \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}$,

- $C \sim \frac{(\ln N)^2}{N}$.

Skálafüggetlen modell magas klaszterezettséggel: Holme–Kim-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

- P. Holme és B. J. Kim: B-A + **extra háromszög formáló lépések.**
 - Az új csúcsokat a pref. kapcs. szabály alapján kötjük be.
 - Minden lépés után p valószínűséggel m háromszöget hozunk létre az új csúcs, a neki választott szomszédok és azok véletlenszerűen választott szomszédai között.

Skálafüggetlen modell magas klaszterezettséggel: Holme–Kim-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

- P. Holme és B. J. Kim: B-A + **extra háromszög formáló lépések.**
 - Az új csúcsokat a pref. kapcs. szabály alapján kötjük be.
 - Minden lépés után p valószínűséggel m háromszöget hozunk létre az új csúcs, a neki választott szomszédok és azok véletlenszerűen választott szomszédai között.

Skálafüggetlen modell magas klaszterezettséggel: Holme–Kim-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

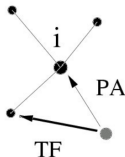
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

- P. Holme és B. J. Kim: B-A + **extra háromszög formáló lépések.**
 - Az új csúcsokat a pref. kapcs. szabály alapján kötjük be.
 - Minden lépés után p valószínűséggel m háromszöget hozunk létre az új csúcs, a neki választott szomszédok és azok véletlenszerűen választott szomszédai között.



Skálafüggetlen modell magas klaszterezettséggel: Holme–Kim-modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

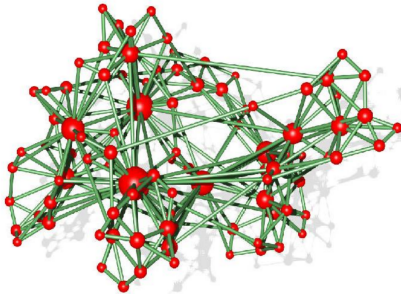
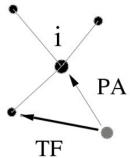
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

- P. Holme és B. J. Kim: B-A + **extra háromszög formáló lépések.**
- Az új csúcsokat a pref. kapcs. szabály alapján kötjük be.
- Minden lépés után p valószínűséggel m háromszöget hozunk létre az új csúcs, a neki választott szomszédok és azok véletlenszerűen választott szomszédai között.



HK graph with $p = 0.9$

Skálafüggetlen modell magas klaszterezettséggel: Holme–Kim modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

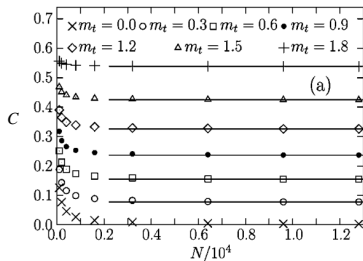
Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

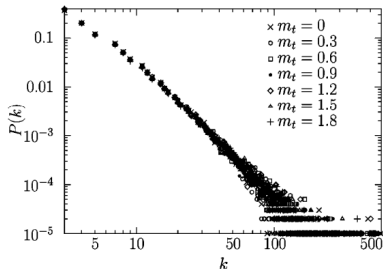
Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

● Holme–Kim-modell:



→ állítható klaszterezettségi együttható!



P. Holme and B. J. Kim, *Phys. Rev. E* **65**, 026107 (2002)

Mi okozhat preferenciális kapcsolódást?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi- modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz- modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert- modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Mi okozhat preferenciális kapcsolódást?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- **Csúcsok duplázódása:** véletlenszerűen választunk egy csúcsot, és lemásoljuk az összes élével együtt. (Esetleg néhány élt véletlenszerűen törölünk az új csúcsról). Pl.: génduplikáció.
- **Élekhez kapcsolódás:** véletlenszerűen választunk egy élt, és az új csúcsot a két végpontjához kötjük hozzá.
- **Bolyongás a hálózaton:** az új csúcs egy v.v. csúcs első, másod, stb. szomszédjához kapcsolódik.
- **stb.**

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A KONFIGURÁCIÓS MODELL

A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Mi van, ha egy alkalmazás szempontjából csak az a fontos, hogy a **fokszámeloszlás skálafüggetlen** legyen, és a konkrét **mechanizmus** aminek révén egy ilyen hálózat előáll kevésbé számít?

- Hogyan lehet egy tetszőleges, de előre rögzített $p(d)$ -vel rendelkező véletlen gráfot generálni?

A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A konfigurációs modell

- A cél az, hogy egy N csúcsból álló, adott $p(d)$ fokszámeloszlással rendelkező véletlen gráfot állítsunk elő, mely megfelel az összes, ennek a két feltételnek megfelelő gráfok által alkotott sokaságból való véletlen mintavételnek.
- Először véletlenszerűen kisorsolunk N fokszámot a $p(d)$ alapján.
- Ezután a „fél éleket” teljesen véletlenszerűen kötögetjük össze.

A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

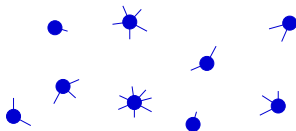
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A konfigurációs modell

- A cél az, hogy egy N csúcsból álló, adott $p(d)$ fokszám-eloszlással rendelkező véletlen gráfot állítsunk elő, mely megfelel az összes, ennek a két feltételnek megfelelő gráfok által alkotott sokaságból való véletlen mintavételnek.
- Először véletlenszerűen kisorsolunk N fokszámot a $p(d)$ alapján.
- Ezután a „fél éleket” teljesen véletlenszerűen kötögetjük össze.



A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skalafüggetlen
modell

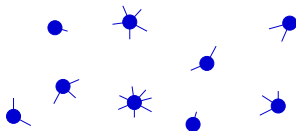
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A konfigurációs modell

- A cél az, hogy egy N csúcsból álló, adott $p(d)$ fokszámeloszlással rendelkező véletlen gráfot állítsunk elő, mely megfelel az összes, ennek a két feltételnek megfelelő gráfok által alkotott sokaságból való véletlen mintavételnek.
- Először véletlenszerűen kisorsolunk N fokszámot a $p(d)$ alapján.
- Ezután a „fél éleket” teljesen véletlenszerűen kötögetjük össze.



A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

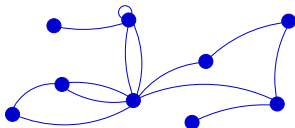
Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A konfigurációs modell

- A cél az, hogy egy N csúcsból álló, adott $p(d)$ fokszám-eloszlással rendelkező véletlen gráfot állítsunk elő, mely megfelel az összes, ennek a két feltételnek megfelelő gráfok által alkotott sokaságból való véletlen mintavételnek.
- Először véletlenszerűen kisorsolunk N fokszámot a $p(d)$ alapján.
- Ezután a „fél éleket” teljesen véletlenszerűen kötögetjük össze.



A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az összekötögetés a nehéz része az eljárásnak, ha egyszerű gráfokban gondolkodunk...
- Hogyan lehetne elkerülni a többszörös élek és az egyazon csúcshoz két véggel kapcsolódó élek létrejöttét?

A konfigurációs modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Általában az a taktika, hogy először nagy fokszámú csúcsok „fél éleit” kötjük be.
 - Azonban az így kapott gráf nem tekinthető egy teljesen homogén mintavételezés eredményének a lehetséges gráfok sokaságából...
- **Randomizáció szükséges!**

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Ha csak N és M rögzített:
- A cél, hogy minden, az élösszekötési folyamatból származó extra korrelációtól megszabaduljunk a **fokszámeloszlás megtartásával**.
- Hogyan lehetne megőrizni fokszámokat a randomizáció során?

Randomizáció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Ha csak N és M rögzített:
→ Erdős–Rényi-gráf.
- A cél, hogy minden, az élösszekötési folyamatból származó extra korrelációtól megszabaduljunk a **fokszámeloszlás megtartásával**.
- Hogyan lehetne megőrizni fokszámokat a randomizáció során?

Randomizáció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Ha csak N és M rögzített:
→ Erdős–Rényi-gráf.
- A cél, hogy minden, az élösszekötési folyamatból származó extra korrelációtól megszabaduljunk a **fokszámeloszlás megtartásával**.
- Hogyan lehetne megőrizni fokszámokat a randomizáció során?

Élrandomizáció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

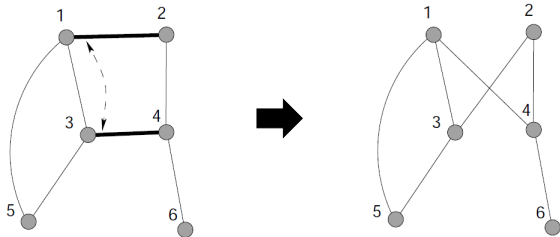
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



Csúcsrandomizáció

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

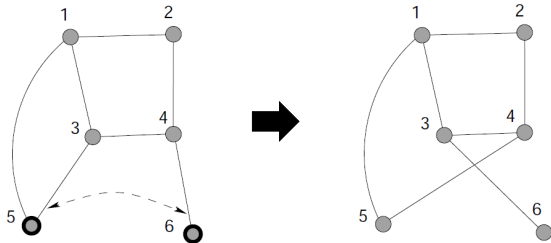
Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások



Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Ha egy valós rendszert reprezentáló hálózatot szeretnénk a konfigurációs modellben vizsgálni:

→ nem kell a fokszámeloszlásból kisorsolni a fokszámokat, egyszerűen csak randomizáljuk az eredeti hálózatot.

„Szignifikancia” mérése randomizációval

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A valós rendszereket leíró hálózatok általában se nem teljesen véletlenszerűek, se nem teljesen szabályosak...
- Annak eldöntésére, hogy egy adott jelenség vagy „mintázat” vajon csak a véletlen műve, vagy valamilyen lényeges tulajdonság hálózatos „vetülete”, általában elég randomizálni a hálózatot.

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

**Determinisztikus
skálafüggetlen
modell**

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

DETERMINISZTIKUS SKÁLAFÜGGETLEN MODELL

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Skálafüggetlen fokszámeloszlású gráfot determinisztikus úton is elő lehet állítani:

- Egy kisméretű gráfból indulunk ki,
- és a fraktálrajzoláshoz hasonlóan minden lépésben több példányban lemásoljuk az előző lépésnél kapott eredményt.
- A másolatok „leveleit” hozzákötjük az eredeti gráf „gyökeréhez”.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Skálafüggetlen fokszámeloszlású gráfot determinisztikus úton is elő lehet állítani:

- Egy kisméretű gráfból indulunk ki,
- és a fraktálrajzoláshoz hasonlóan minden lépésben több példányban lemásoljuk az előző lépésnél kapott eredményt.
- A másolatok „leveleit” hozzákötjük az eredeti gráf „gyökeréhez”.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Skálafüggetlen fokszámeloszlású gráfot determinisztikus úton is elő lehet állítani:

- Egy kisméretű gráfból indulunk ki,
- és a fraktálrajzoláshoz hasonlóan minden lépésben több példányban lemásoljuk az előző lépésnél kapott eredményt.
- A másolatok „leveleit” hozzákötjük az eredeti gráf „gyökeréhez”.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Példa

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A.-L. Barabási, E. Ravasz and T. Vicsek, *Physica A* **299**, 559–564 (2001).

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Példa

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

**Determinisztikus
skálafüggetlen
modell**

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A.-L. Barabási, E. Ravasz and T. Vicsek, *Physica A* **299**, 559–564 (2001).

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Példa

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

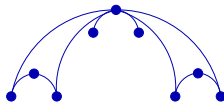
Randomizáció

**Determinisztikus
skálafüggetlen
modell**

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A.-L. Barabási, E. Ravasz and T. Vicsek, *Physica A* **299**, 559–564 (2001).

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Példa

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

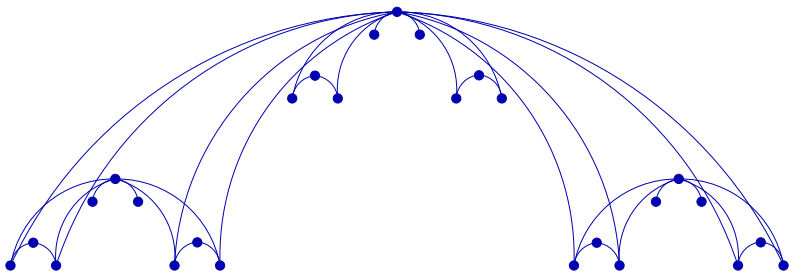
Randomizáció

**Determinisztikus
skálafüggetlen
modell**

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások



A.-L. Barabási, E. Ravasz and T. Vicsek, *Physica A* **299**, 559–564 (2001).

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.

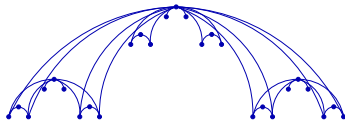
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.

- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:

$$\begin{aligned}P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}.\end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése $\sim d^{-\ln 3 / \ln 2}$,

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1 + \ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.



Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus
Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs modell

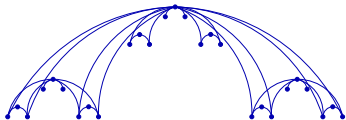
Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.



- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:

$$\begin{aligned} P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}. \end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése $\sim d^{-\ln 3 / \ln 2}$,

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1 + \ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus

Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.

- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.

- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,

- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.

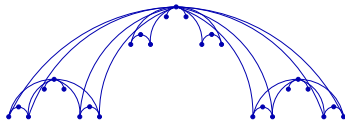
- A kumulatív fokszámeloszlás:

$$\begin{aligned} P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}. \end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése

$$\sim d^{-\ln 3 / \ln 2},$$

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1+\ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.



Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

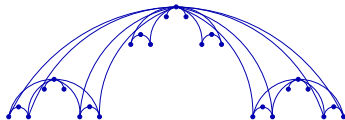
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.
- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:



$$\begin{aligned} P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}. \end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése $\sim d^{-\ln 3 / \ln 2}$,

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1 + \ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus
Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs modell

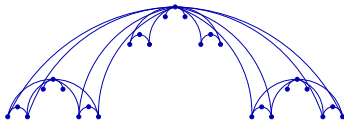
Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.
- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:



$$\begin{aligned} P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}. \end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése

$$\sim d^{-\ln 3 / \ln 2},$$

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1+\ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus
Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs modell

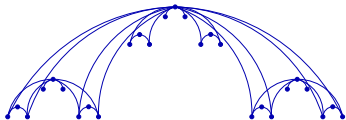
Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.
- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:



$$\begin{aligned}P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}.\end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése $\sim d^{-\ln 3 / \ln 2}$,

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1+\ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Fokszámeloszlás

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

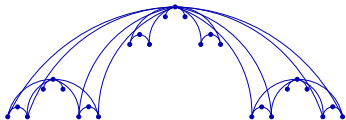
Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia
Topologikus
fázisátalakulások

- Számoljuk úgy a lépéseket, hogy a 0. lépésnél van 1 csúcs, az 1. lépésnél 3, stb.
- Az i -ik lépésnél a gyökér fokszáma $2^{i+1} - 2$.
- A következő lépésben két ilyen fokszámú csúcs lesz,
- az n -ik lépésnél meg már $2 \cdot 3^{n-i-1}$ darab.
- A kumulatív fokszámeloszlás:



$$\begin{aligned} P_n(2^{i+1} - 2) &= P(d < 2^{i+1} - 2) = 1 - P(d \geq 2^{i+1} - 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[\sum_{k=i}^{n-1} 2 \cdot 3^{n-k-1} + 1 \right] = 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \sum_{q=0}^{n-i-1} 3^q + 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} \left[2 \frac{3^{n-i} - 1}{2} + 1 \right] = 1 - 3^{-i}. \end{aligned}$$

- Ezek alapján a komplementer kumulatív eloszlás lecsengése $\sim d^{-\ln 3 / \ln 2}$,

→ a fokszámeloszlás lecsengése $\sim d^{-(1 + \ln 3 / \ln 2)}$ azaz $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2$.

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

GRÁFSOKASÁGOK

Hálózatok átstrukturálódása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Bizonyos hálózatokban az élek átrendeződése ugyanolyan fontos mint a növekedés és az új csúcsok bekötődése.
 - gazdasági hálózatok,
 - bizonyos emberi kapcsolatháló, pl. iskolai osztályközösség,
 - élő szervezet biológiai, biokémiai hálózatai, ahol különböző „élethelyzetekhez” kell alkalmazkodni, (pl. egy baktérium tápanyaglebontását leíró metabolikus hálózat tápanyagban gazdag vagy tápanyagban szegény környezetben),
 - stb.
- Miként lehetne az ilyen rendszereket egy általános keretrendszerben modellezni?

Hálózatok átstrukturálódása

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Bizonyos hálózatokban az élek átrendeződése ugyanolyan fontos mint a növekedés és az új csúcsok bekötődése.
 - gazdasági hálózatok,
 - bizonyos emberi kapcsolatháló, pl. iskolai osztályközösség,
 - élő szervezet biológiai, biokémiai hálózatai, ahol különböző „élethelyzetekhez” kell alkalmazkodni, (pl. egy baktérium tápanyaglebontását leíró metabolikus hálózat tápanyagban gazdag vagy tápanyagban szegény környezetben),
 - stb.
- Miként lehetne az ilyen rendszereket egy általános keretrendszerben modellezni?

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Kanonikus gráfsokaság

- Az összes lehetséges, N csúcsból álló és M éllel rendelkező gráf,
- melyek előfordulási valószínűségét egy E energiafüggvény és egy T effektív hőmérséklet szabja meg:

$$P(\mathcal{G}_i) = \frac{e^{-E_i/T}}{Z(T)} = \frac{e^{-E_i/T}}{\sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T}},$$

ahol a partíciós függvény

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T}$$

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skalafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Kanonikus gráfsokaság

- Az összes lehetséges, N csúcsból álló és M éllel rendelkező gráf,
- melyek előfordulási valószínűségét egy E energiafüggvény és egy T effektív hőmérséklet szabja meg:

$$P(\mathcal{G}_i) = \frac{e^{-E_i/T}}{Z(T)} = \frac{e^{-E_i/T}}{\sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T}},$$

ahol a partíciós függvény

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T}$$

Gráfsokaságok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A hálózat átrendeződésének modellezése:

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A hálózat átrendeződésének modellezése:

- Monte–Carlo-szimuláció, egy lépés egy v.v. él egyik végének véletlenszerű átkötése,

Gráfsokaságok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A hálózat átrendeződésének modellezése:

- Monte–Carlo-szimuláció, egy lépés egy v.v. él egyik végének véletlenszerű átkötése,
- az átmeneti valószínűség a kiinduló gráf \mathcal{G}_i és a végállapot \mathcal{G}_j energiájának különbségétől függ:

$$P(\mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } E_j \leq E_i \\ e^{-\frac{E_j - E_i}{T}} & \text{ha } E_j > E_i \end{cases}$$

(Metropolis–Hastings-algoritmus)

Gráfsokaságok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A hálózat átrendeződésének modellezése:

- Monte–Carlo-szimuláció, egy lépés egy v.v. él egyik végének véletlenszerű átkötése,
- az átmeneti valószínűség a kiinduló gráf \mathcal{G}_i és a végállapot \mathcal{G}_j energiájának különbségétől függ:

$$P(\mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } E_j \leq E_i \\ e^{\frac{E_j - E_i}{T}} & \text{ha } E_j > E_i \end{cases}$$

(Metropolis–Hastings-algoritmus)

- Milyen hálózatot kapunk, ha $T \rightarrow \infty$?

Gráfsokaságok

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A hálózat átrendeződésének modellezése:

- Monte–Carlo-szimuláció, egy lépés egy v.v. él egyik végének véletlenszerű átkötése,
- az átmeneti valószínűség a kiinduló gráf \mathcal{G}_i és a végállapot \mathcal{G}_j energiájának különbségétől függ:

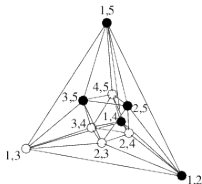
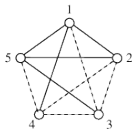
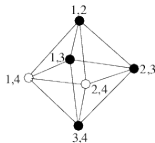
$$P(\mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } E_j \leq E_i \\ e^{\frac{E_j - E_i}{T}} & \text{ha } E_j > E_i \end{cases}$$

(Metropolis–Hastings-algoritmus)

- Milyen hálózatot kapunk, ha $T \rightarrow \infty$?
- Ilyenkor minden véletlenszerű átkötést elfogadunk, ezért egy E-R-gráfba megy át a hálózat.

Gráfsokaságok

Az élettrendezőési dinamika ekvivalens egy Kawasaki-féle rácsgáz dinamikájával:



- A rácspontok a lehetséges éleknek felelnek meg, összesen $N(N-1)/2$ rácspont.
- A betöltött rácspontok felelnek meg a létező élek aktuális helyzetének.

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós hálózatok

Watts–Strogatz-modell

Kis világ effektus
Skálázás és renormálás

Barabási–Albert-modell

Növekedés és Pref. kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs modell

Randomizáció

Determinisztikus skálafüggetlen modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus fázisátalakulások

Szabadenergia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A partíciós függvényben nagyon sok **izomorf** tag van, hiszen minden lehetséges N csúcsból és M élből álló gráf szerepel benne.

→ Tegyük fel, hogy E **csak a topológiától függ** és vonjuk össze $Z(T)$ -ben az izomorf tagokat:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} \mathcal{N}_\alpha e^{-E_\alpha/T},$$

ahol a \mathcal{T}_α topológián belül összesen \mathcal{N}_α módon lehet permutálni a csúcsindexeket, és E_α a topológiához tartozó energia.

- A **szabadenergiát** így vezethetjük be:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-E_\alpha/T + \ln \mathcal{N}_\alpha} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-F_\alpha/T},$$

$$F_\alpha = E_\alpha - T \ln \mathcal{N}_\alpha = E_\alpha - TS_\alpha,$$

ahol $S_\alpha = \ln \mathcal{N}_\alpha$ az **entrópia**

Szabadenergia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A partíciós függvényben nagyon sok **izomorf** tag van, hiszen minden lehetséges N csúcsból és M élből álló gráf szerepel benne.

→ Tegyük fel, hogy E **csak a topológiától függ** és vonjuk össze $Z(T)$ -ben az izomorf tagokat:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} \mathcal{N}_\alpha e^{-E_\alpha/T},$$

ahol a \mathcal{T}_α topológián belül összesen \mathcal{N}_α módon lehet permutálni a csúcsindexeket, és E_α a topológiához tartozó energia.

- A **szabadenergiát** így vezethetjük be:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-E_\alpha/T + \ln \mathcal{N}_\alpha} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-F_\alpha/T},$$

$$F_\alpha = E_\alpha - T \ln \mathcal{N}_\alpha = E_\alpha - TS_\alpha,$$

ahol $S_\alpha = \ln \mathcal{N}_\alpha$ az **entrópia**

Szabadenergia

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skalárfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- A partíciós függvényben nagyon sok **izomorf** tag van, hiszen minden lehetséges N csúcsból és M élből álló gráf szerepel benne.

→ Tegyük fel, hogy E **csak a topológiától függ** és vonjuk össze $Z(T)$ -ben az izomorf tagokat:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{G}_j\}} e^{-E_j/T} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} \mathcal{N}_\alpha e^{-E_\alpha/T},$$

ahol a \mathcal{T}_α topológián belül összesen \mathcal{N}_α módon lehet permutálni a csúcsindexeket, és E_α a topológiához tartozó energia.

- A **szabadenergiát** így vezethetjük be:

$$Z(T) = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-E_\alpha/T + \ln \mathcal{N}_\alpha} = \sum_{\{\mathcal{T}_\alpha\}} e^{-F_\alpha/T},$$

$$F_\alpha = E_\alpha - T \ln \mathcal{N}_\alpha = E_\alpha - TS_\alpha,$$

ahol $S_\alpha = \ln \mathcal{N}_\alpha$ az **entrópia**

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Egy Ising-modellel ekvivalens energiafüggvény:

- Minden élpár, melyek egyik végükkel egy közös csúcshoz kapcsolódnak, egy $-J$ járulékot ad az energiához,

$$E = -J \sum_{i=1}^N d_i (d_i - 1).$$

- A rácsgázképben ez

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta, \quad b_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \text{ betöltött,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol az összegzés a szomszédos rácspontokra megy.

- Áttérünk egy $z_\alpha = \pm 1$ spin jellegű változóra:

$$\begin{aligned} E &= -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \frac{1 + z_\alpha}{2} \frac{1 + z_\beta}{2} = \\ &= -\frac{J}{4} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} z_\alpha z_\beta - \frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} z_\alpha - \frac{J}{8} N(N-1)(N-2). \end{aligned}$$

(Ez ekvivalens az Ising-modellel külső mágneses tér jelenlétében).

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való-
s hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Egy Ising-modellel ekvivalens energiafüggvény:

- Minden élpár, melyek egyik végükkel egy közös csúcshoz kapcsolódnak, egy $-J$ járulékot ad az energiához,

$$E = -J \sum_{i=1}^N d_i (d_i - 1).$$

- A rácsgázképben ez

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta, \quad b_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \text{ betöltött,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol az összegzés a szomszédos rácspontokra megy.

- Áttérünk egy $z_\alpha = \pm 1$ spin jellegű változóra:

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \frac{1 + z_\alpha}{2} \frac{1 + z_\beta}{2} =$$
$$-\frac{J}{4} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} z_\alpha z_\beta - \frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} z_\alpha - \frac{J}{8} N(N-1)(N-2).$$

(Ez ekvivalens az Ising-modellel külső mágneses tér jelenlétében).

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Egy Ising-modellel ekvivalens energiafüggvény:

- Minden élpár, melyek egyik végükkel egy közös csúcshoz kapcsolódnak, egy $-J$ járulékot ad az energiához,

$$E = -J \sum_{i=1}^N d_i (d_i - 1).$$

- A rácsgázképben ez

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta, \quad b_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \text{ betöltött,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol az összegzés a szomszédos rácspontokra megy.

- Áttérünk egy $z_\alpha = \pm 1$ spin jellegű változóra:

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \frac{1 + z_\alpha}{2} \frac{1 + z_\beta}{2} =$$
$$-\frac{J}{4} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} z_\alpha z_\beta - \frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} z_\alpha - \frac{J}{8} N(N-1)(N-2).$$

(Ez ekvivalens az Ising-modellel külső mágneses tér jelenlétében).

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és való
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

Egy Ising-moddellel ekvivalens energiafüggvény:

- Minden élpár, melyek egyik végükkel egy közös csúcshoz kapcsolódnak, egy $-J$ járulékot ad az energiához,

$$E = -J \sum_{i=1}^N d_i (d_i - 1).$$

- A rácsgázképben ez

$$E = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta, \quad b_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \text{ betöltött,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol az összegzés a szomszédos rácspontokra megy.

- Áttérünk egy $z_\alpha = \pm 1$ spin jellegű változóra:

$$\begin{aligned} E &= -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} b_\alpha b_\beta = -J \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \frac{1 + z_\alpha}{2} \frac{1 + z_\beta}{2} = \\ &= -\frac{J}{4} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} z_\alpha z_\beta - \frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} z_\alpha - \frac{J}{8} N(N-1)(N-2). \end{aligned}$$

(Ez ekvivalens az Ising-moddellel külső mágneses tér jelenlétében).

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az alapállapot ilyenkor egy „csillag”, melynél az egyik csúcs az összes élt begyűjti.

→ Az E-R gráf ↔ csillag átalakulás tanulmányozására a $\Phi = d_{\max}/M$ rendparaméter a természetes választás.

- Bevezethetjük a $F(\Phi, T)$ feltételes szabadenergiát:

$$e^{-F(\Phi, T)/T} = Z(\Phi, T) = \sum_{\{\mathcal{G}_a\}_\Phi} e^{-E_\Phi/T},$$

ahol $\{\mathcal{G}_a\}_\Phi$ azon gráfok részhalmaza, melyeknél a rendparaméter értéke Φ .

- Itt nem részletezett számolások alapján

$$F(\Phi, T) \approx M \left[-\Phi^2 M + \Phi T \ln N \right]$$

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skalafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az alapállapot ilyenkor egy „csillag”, melynél az egyik csúcs az összes élt begyűjti.

→ Az E-R gráf ↔ csillag átalakulás tanulmányozására a $\Phi = d_{\max}/M$ rendparaméter a természetes választás.

- Bevezethetjük a $F(\Phi, T)$ feltételes szabadenergiát:

$$e^{-F(\Phi, T)/T} = Z(\Phi, T) = \sum_{\{\mathcal{G}_a\}_\Phi} e^{-E_\Phi/T},$$

ahol $\{\mathcal{G}_a\}_\Phi$ azon gráfok részhalmaza, melyeknél a rendparaméter értéke Φ .

- Itt nem részletezett számolások alapján

$$F(\Phi, T) \approx M \left[-\Phi^2 M + \Phi T \ln N \right]$$

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az alapállapot ilyenkor egy „csillag”, melynél az egyik csúcs az összes élt begyűjti.

→ Az E-R gráf ↔ csillag átalakulás tanulmányozására a $\Phi = d_{\max}/M$ rendparaméter a természetes választás.

- Bevezethetjük a $F(\Phi, T)$ feltételes szabadenergiát:

$$e^{-F(\Phi, T)/T} = Z(\Phi, T) = \sum_{\{\mathcal{G}_a\}_\Phi} e^{-E_\Phi/T},$$

ahol $\{\mathcal{G}_a\}_\Phi$ azon gráfok részhalmaza, melyeknél a rendparaméter értéke Φ .

- Itt nem részletezett számolások alapján

$$F(\Phi, T) \approx M \left[-\Phi^2 M + \Phi T \ln N \right]$$

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Az alapállapot ilyenkor egy „csillag”, melynél az egyik csúcs az összes élt begyűjti.

→ Az E-R gráf ↔ csillag átalakulás tanulmányozására a $\Phi = d_{\max}/M$ rendparaméter a természetes választás.

- Bevezethetjük a $F(\Phi, T)$ feltételes szabadenergiát:

$$e^{-F(\Phi, T)/T} = Z(\Phi, T) = \sum_{\{\mathcal{G}_a\}_\Phi} e^{-E_\Phi/T},$$

ahol $\{\mathcal{G}_a\}_\Phi$ azon gráfok részhalmaza, melyeknél a rendparaméter értéke Φ .

- Itt nem részletezett számolások alapján

$$F(\Phi, T) \approx M \left[-\Phi^2 M + \Phi T \ln N \right]$$

Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

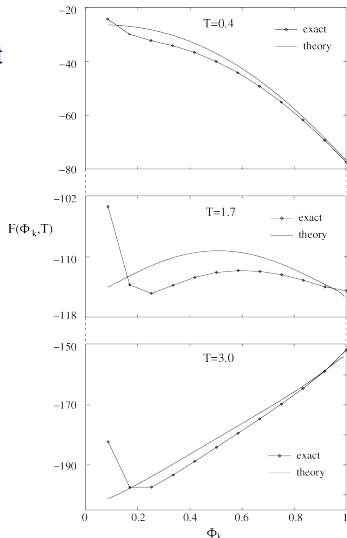
Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Kis rendszerek esetén egzaktul is le lehet számolni a lehetséges topológiákat, az eredmények jó egyezést mutatnak az elmélettel.
- Alacsony hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 1$ -nél van, ami a csillagszerű állapotnak felel meg.
- Magas hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 0$ -hoz közel van, ami az E-R-gráf szerű állapotnak felel meg.
- Mivel egy hőmérséklet-tartományon két minimuma is van F -nek, (egyik stabil, a másik metastabil), a fázisátalakulás elsőrendű.



Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

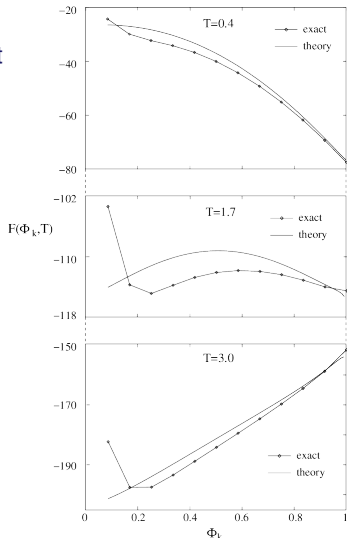
Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Kis rendszerek esetén egzaktul is le lehet számolni a lehetséges topológiákat, az eredmények jó egyezést mutatnak az elmélettel.
- Alacsony hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 1$ -nél van, ami a csillagszerű állapotnak felel meg.
- Magas hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 0$ -hoz közel van, ami az E-R-gráf szerű állapotnak felel meg.
- Mivel egy hőmérséklet-tartományon két minimuma is van F -nek, (egyik stabil, a másik metastabil), a fázisátalakulás elsőrendű.



Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

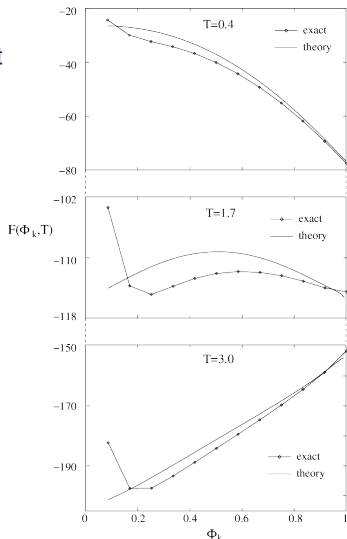
Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Kis rendszerek esetén egzaktul is le lehet számolni a lehetséges topológiákat, az eredmények jó egyezést mutatnak az elmélettel.
- Alacsony hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 1$ -nél van, ami a csillagszerű állapotnak felel meg.
- Magas hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 0$ -hoz közel van, ami az E-R-gráf szerű állapotnak felel meg.
- Mivel egy hőmérséklet-tartományon két minimuma is van F -nek, (egyik stabil, a másik metastabil), a fázisátalakulás elsőrendű.



Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

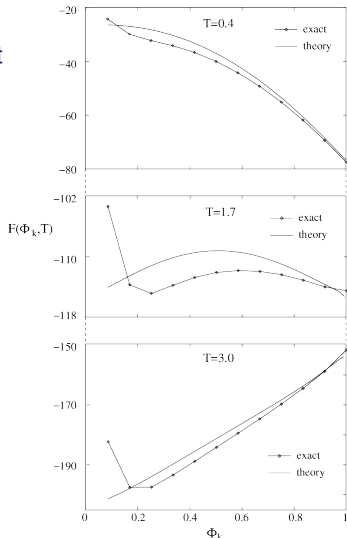
Randomizáció

Determinisztikus
skaláfüggetlen
modell

Gráfsokaságok
Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

- Kis rendszerek esetén egzaktul is le lehet számolni a lehetséges topológiákat, az eredmények jó egyezést mutatnak az elmélettel.
- Alacsony hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 1$ -nél van, ami a csillagszerű állapotnak felel meg.
- Magas hőmérsékleten $F(\Phi, T)$ minimuma $\Phi = 0$ -hoz közel van, ami az E-R-gráf szerű állapotnak felel meg.
- Mivel egy hőmérséklet-tartományon két minimuma is van F -nek, (egyik stabil, a másik metastabil), a fázisátalakulás elsőrendű.



Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok
Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus
Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.
Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

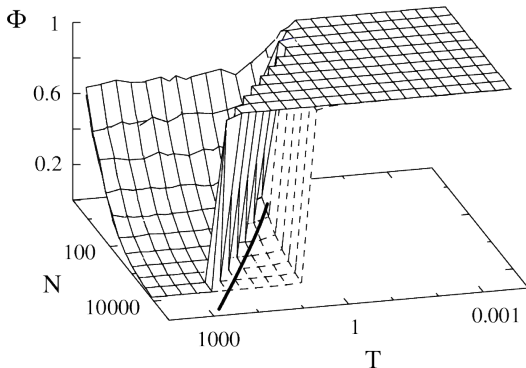
Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

Topologikus
fázisátalakulások

A numerikus szimulációk eredményei nagyobb rendszerméretekre hiszterézist mutatnak az átalakulásnál, ami szintén arra utal, hogy az átalakulás elsőrendű:



Topologikus fázisátalakulások

Hálózatok II.

Erdős–Rényi-
modell

Tulajdonságok

Perkoláció

E-R gráf és valós
hálózatok

Watts–Strogatz-
modell

Kis világ effektus

Skálázás és
renormálás

Barabási–Albert-
modell

Növekedés és Pref.
kapcs.

Klaszterezettség

Konfigurációs
modell

Randomizáció

Determinisztikus
skálafüggetlen
modell

Gráfsokaságok

Szabadenergia

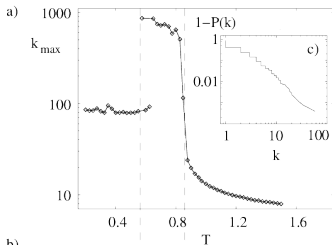
Topologikus
fázisátalakulások

- Ha áttérünk az

$$E = -J \sum_i d_i \ln d_i$$

energiára, akkor

- **folytonos
átalakulás,**
- a kritikus pontban
**skálafüggetlen
gráfok!**



b)



Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

HÁLÓZATOK III: ALKALMAZÁSOK

Hálózatok robusztussága, terjedés hálózatokon, SIS modell, hálózati csoportkeresés, hierarchikus klaszterezés, Girvan–Newman-algoritmus, modularitás, k -klikk perkoláció.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

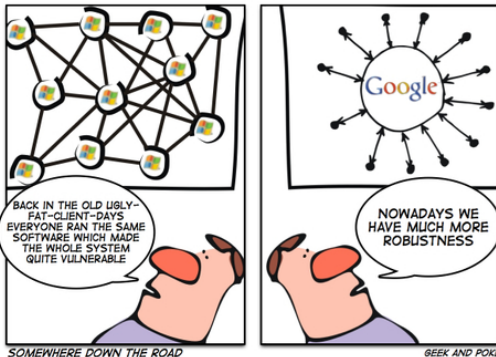
Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció



HÁLÓZATOK ROBUSZTUSSÁGA

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A valódi rendszereket reprezentáló hálózatok robusztusak:

- Élő sejtek: gén mutációk...
- Internet: router leállítások...
- stb.

Annak ellenére, hogy a csúcsok (élek) egy része nem funkcionál, az egész rendszer jobbra zavartalanul működik.

Hálózatok robusztussága

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

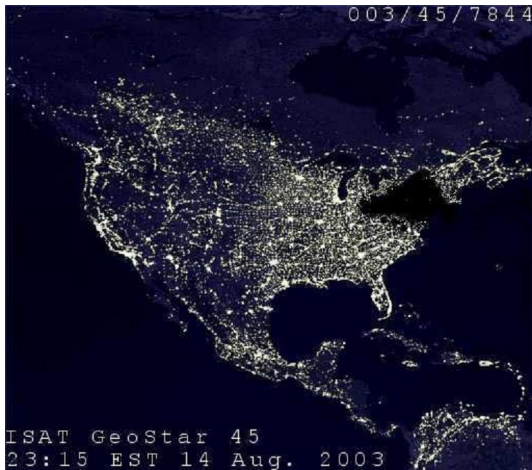
A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Azonban ha túl sok élt vagy csúcsot távolítunk el, azzal előidézhethetünk rendszerszintű leállást:



Hálózatok robusztussága

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

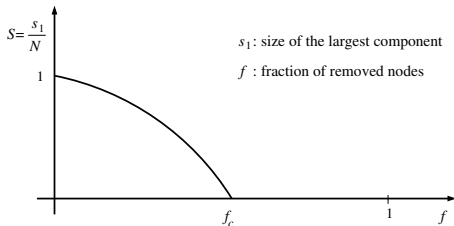
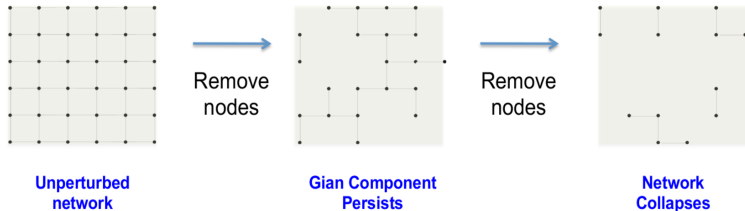
Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan jellemezzük kvantitatíven a hálózat szétesését egy véletlen él- vagy csúcseltávolítási folyamat során?
- Miként befolyásolja a hálózatstruktúra az ilyen folyamatokkal szembeni robusztusságot?

„Inverz” perkoláció

Az élek vagy csúcsok véletlenszerű eltávolítása egy inverz perkolációs folyamatnak felel meg:



„Inverz” perkoláció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

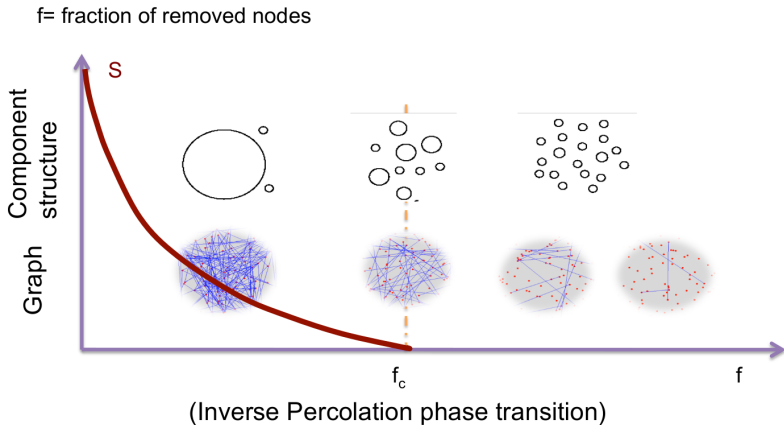
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



(Barabási A.-L. előlíról)

Általános gráfperkoláció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Az óriás komponensben az átlagos fokszám: $\langle d \rangle_G \geq 2$



- Legyen $\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)$ annak **feltételes valószínűsége**, hogy i fokszáma d_i , feltéve, hogy hozzákapcsolódik egy j csúcshoz.
- Tegyük fel, hogy a gráf élei véletlenszerűek, adott fokszámeloszlás mellett, és a gráf tartalmaz egy óriás komponenszt.
- Az egyszerűség kedvéért azt is tegyük fel, hogy amely csúcs legalább egy másikhoz hozzákötődik, az már benne is van az óriás komponensben.

$$\langle d \rangle_G = \langle d_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Az óriás komponensben az átlagos fokszám: $\langle d \rangle_G \geq 2$



- Legyen $\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)$ annak **feltételes valószínűsége**, hogy i fokszáma d_i , feltéve, hogy hozzákapcsolódik egy j csúcshoz.
- Tegyük fel, hogy a gráf **élei véletlenszerűek**, adott fokszámeloszlás mellett, és a gráf tartalmaz egy **óriás komponens**t.
- Az egyszerűség kedvéért azt is tegyük fel, hogy amely csúcs legalább egy másikhoz hozzákötődik, az már benne is van az óriás komponensben.

$$\langle d \rangle_G \simeq \langle d_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Az óriás komponensben az átlagos fokszám: $\langle d \rangle_G \geq 2$



- Legyen $\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)$ annak **feltételes valószínűsége**, hogy i fokszáma d_i , feltéve, hogy hozzákapcsolódik egy j csúcshoz.
- Tegyük fel, hogy a gráf **élei véletlenszerűek**, adott fokszámeloszlás mellett, és a gráf tartalmaz egy **óriás komponent**st.
- Az egyszerűség kedvéért azt is tegyük fel, hogy amely csúcs legalább egy másikhoz hozzákötődik, az már benne is van az óriás komponensben.

$$\langle d \rangle_G \simeq \langle d_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)\mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)\mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)\mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózatban

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)\mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózatban

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j)\mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(d_i, i \leftrightarrow j) = \mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)}$$

- Egy véletlenszerűen összehuzalozott hálózatban

$$\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i) = \frac{d_i}{N}, \quad \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{2M}{N(N-1)} = \frac{\langle d \rangle}{N}$$

→ Ennek alapján az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\sum_i d_i \mathcal{P}(d_i | i \leftrightarrow j) = \sum_i d_i \frac{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j | d_i)p(d_i)}{\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)} =$$

$$\sum_i d_i \frac{d_i p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\sum_i d_i^2 p(d_i)}{\langle d \rangle} = \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2.$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózatán

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman- algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Mit ad ez az E–R-gráfra?

$$p(d) \simeq \frac{\langle d \rangle^d e^{-\langle d \rangle}}{d!}, \rightarrow \langle d^2 \rangle = \langle d \rangle (1 + \langle d \rangle),$$

$$\rightarrow \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} = 1 + \langle d \rangle \geq 2$$

$$\rightarrow \langle d \rangle \geq 1,$$

ami teljesen konzisztens a korábbi eredményeinkkel.

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Mi a helyzet a **skálafüggetlen** gráfokkal?

- Ha $p(d) \sim d^{-\gamma}$, akkor $\langle d^2 \rangle$ így viselkedik:

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Mi a helyzet a **skálafüggetlen** gráfokkal?

- Ha $p(d) \sim d^{-\gamma}$, akkor $\langle d^2 \rangle$ így viselkedik:

$$p(d) = Cd^{-\gamma}, \quad \int_{d_{\min}}^{\infty} p(z) dz = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{Cd_{\min}^{1-\gamma}}{\gamma-1} = 1, \quad C = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}}$$

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Mi a helyzet a **skálafüggetlen** gráfokkal?

- Ha $p(d) \sim d^{-\gamma}$, akkor $\langle d^2 \rangle$ így viselkedik:

$$p(d) = Cd^{-\gamma}, \quad \int_{d_{\min}}^{\infty} p(z) dz = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{Cd_{\min}^{1-\gamma}}{\gamma-1} = 1, \quad C = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}}$$

$$\langle d^2 \rangle = \int_{d_{\min}}^{\infty} Cz^{2-\gamma} dz = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}} \int_{d_{\min}}^{\infty} z^{2-\gamma} dz = \frac{(\gamma-1) [d^{3-\gamma}]_{d_{\min}}^{\infty}}{(3-\gamma)d_{\min}^{1-\gamma}}.$$

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Mi a helyzet a **skálafüggetlen** gráfokkal?

- Ha $p(d) \sim d^{-\gamma}$, akkor $\langle d^2 \rangle$ így viselkedik:

$$p(d) = Cd^{-\gamma}, \quad \int_{d_{\min}}^{\infty} p(z) dz = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{Cd_{\min}^{1-\gamma}}{\gamma-1} = 1, \quad C = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}}$$

$$\langle d^2 \rangle = \int_{d_{\min}}^{\infty} Cz^{2-\gamma} dz = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}} \int_{d_{\min}}^{\infty} z^{2-\gamma} dz = \frac{(\gamma-1)[d_{\min}^{3-\gamma}]_{d_{\min}}^{\infty}}{(3-\gamma)d_{\min}^{1-\gamma}}.$$

$$\rightarrow \langle d^2 \rangle = \begin{cases} \infty & \text{ha } \gamma < 3 \\ \frac{(\gamma-1)d_{\min}^2}{\gamma-3} & \text{ha } \gamma > 3 \end{cases}$$

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Általános gráfperkoláció

Kritikus pont

Mi a helyzet a **skálafüggetlen** gráfokkal?

- Ha $p(d) \sim d^{-\gamma}$, akkor $\langle d^2 \rangle$ így viselkedik:

$$p(d) = Cd^{-\gamma}, \quad \int_{d_{\min}}^{\infty} p(z) dz = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{Cd_{\min}^{1-\gamma}}{\gamma-1} = 1, \quad C = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}}$$

$$\langle d^2 \rangle = \int_{d_{\min}}^{\infty} Cz^{2-\gamma} dz = \frac{\gamma-1}{d_{\min}^{1-\gamma}} \int_{d_{\min}}^{\infty} z^{2-\gamma} dz = \frac{(\gamma-1) [d^{3-\gamma}]_{d_{\min}}^{\infty}}{(3-\gamma)d_{\min}^{1-\gamma}}.$$

$$\rightarrow \langle d^2 \rangle = \begin{cases} \infty & \text{ha } \gamma < 3 \\ \frac{(\gamma-1)d_{\min}^2}{\gamma-3} & \text{ha } \gamma > 3 \end{cases}$$

- Mivel a valós hálózatok esetén $2 \leq \gamma \leq 3$, így ezeknél a $\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \geq 2$ feltétel „automatikusan” teljesül, a jóslat szerint mindig van bennük egy óriás komponens!

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k-klíkk perkoláció

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A csúcsok véletlenszerű meghibásodásának folyamatát így vizsgálhatjuk:

- Tegyük fel, hogy ismert a kezdeti (ép) hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$.
- A csúcsok f hányadának véletlenszerű eltávolítása esetén először meghatározzuk az ez által módosult $p'(d')$ fokszámeloszlást,
- majd $p'(d')$ alapján kiszámoljuk $\langle d' \rangle$ és $\langle (d')^2 \rangle$ értékét, és behelyettesítünk:

$$\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} \stackrel{?}{\geq} 2.$$

- **Kritikus f :** Mekkora az a minimális f_c , ahol már nem teljesül az egyenlőtlenség?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A csúcsok véletlenszerű meghibásodásának folyamatát így vizsgálhatjuk:

- Tegyük fel, hogy ismert a kezdeti (ép) hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$.
- A csúcsok f hányadának véletlenszerű eltávolítása esetén először meghatározzuk az ez által módosult $p'(d')$ fokszámeloszlást,
- majd $p'(d')$ alapján kiszámoljuk $\langle d' \rangle$ és $\langle (d')^2 \rangle$ értékét, és behelyettesítünk:

$$\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} \stackrel{?}{\geq} 2.$$

- **Kritikus f :** Mekkora az a minimális f_c , ahol már nem teljesül az egyenlőtlenség?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A csúcsok véletlenszerű meghibásodásának folyamatát így vizsgálhatjuk:

- Tegyük fel, hogy ismert a kezdeti (ép) hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$.
- A csúcsok f hányadának véletlenszerű eltávolítása esetén először meghatározzuk az ez által módosult $p'(d')$ fokszámeloszlást,
- majd $p'(d')$ alapján kiszámoljuk $\langle d' \rangle$ és $\langle (d')^2 \rangle$ értékét, és behelyettesítünk:

$$\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} \stackrel{?}{\geq} 2.$$

- **Kritikus f :** Mekkora az a minimális f_c , ahol már nem teljesül az egyenlőtlenség?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A csúcsok véletlenszerű meghibásodásának folyamatát így vizsgálhatjuk:

- Tegyük fel, hogy ismert a kezdeti (ép) hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$.
- A csúcsok f hányadának véletlenszerű eltávolítása esetén először meghatározzuk az ez által módosult $p'(d')$ fokszámeloszlást,
- majd $p'(d')$ alapján kiszámoljuk $\langle d' \rangle$ és $\langle (d')^2 \rangle$ értékét, és behelyettesítünk:

$$\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} \stackrel{?}{\geq} 2.$$

- **Kritikus f :** Mekkora az a minimális f_c , ahol már nem teljesül az egyenlőtlenség?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A csúcsok véletlenszerű meghibásodásának folyamatát így vizsgálhatjuk:

- Tegyük fel, hogy ismert a kezdeti (ép) hálózat fokszámeloszlása, $p(d)$.
- A csúcsok f hányadának véletlenszerű eltávolítása esetén először meghatározzuk az ez által módosult $p'(d')$ fokszámeloszlást,
- majd $p'(d')$ alapján kiszámoljuk $\langle d' \rangle$ és $\langle (d')^2 \rangle$ értékét, és behelyettesítünk:

$$\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} \stackrel{?}{\geq} 2.$$

- **Kritikus f :** Mekkora az a minimális f_c , ahol már nem teljesül az egyenlőtlenség?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Mi lenne $\langle d' \rangle$ egyszerű becslése $f \ll 1$ esetén?

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Mi lenne $\langle d' \rangle$ egyszerű becslése $f \ll 1$ esetén?
 - a csúcsok f hányadának eltávolítása átlagosan az élek szintén f hányadát viszi magával.
- ennél fogva $1 - f$ hányada marad meg az éleknek, $\langle d' \rangle = (1 - f) \langle d \rangle$.

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A módosult fokszámeloszlás meghatározása:

- Annak valószínűsége, hogy egy eredetileg d fokszámú csúcs q szomszédját veszíti el:

$$\mathcal{P}_d(q \text{ élt veszít}) = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q}$$

- A módosult fokszám $d' = d - q$, azaz

$$\begin{aligned} P(d \rightarrow d') &= \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q} = \binom{d}{d-d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \\ &= \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}. \end{aligned}$$

- Emiatt a módosult fokszámeloszlás:

$$p'(d') = \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A módosult fokszámeloszlás meghatározása:

- Annak valószínűsége, hogy egy eredetileg d fokszámú csúcs q szomszédját veszíti el:

$$\mathcal{P}_d(q \text{ élt veszít}) = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q}$$

- A módosult fokszám $d' = d - q$, azaz

$$P(d \rightarrow d') = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q} = \binom{d}{d-d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

- Emiatt a módosult fokszámeloszlás:

$$p'(d') = \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A módosult fokszámeloszlás meghatározása:

- Annak valószínűsége, hogy egy eredetileg d fokszámú csúcs q szomszédját veszíti el:

$$\mathcal{P}_d(q \text{ élt veszít}) = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q}$$

- A módosult fokszám $d' = d - q$, azaz

$$\begin{aligned} P(d \rightarrow d') &= \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q} = \binom{d}{d-d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \\ &= \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}. \end{aligned}$$

- Emiatt a módosult fokszámeloszlás:

$$p'(d') = \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A módosult fokszámeloszlás meghatározása:

- Annak valószínűsége, hogy egy eredetileg d fokszámú csúcs q szomszédját veszíti el:

$$\mathcal{P}_d(q \text{ élt veszít}) = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q}$$

- A módosult fokszám $d' = d - q$, azaz

$$P(d \rightarrow d') = \binom{d}{q} f^q (1-f)^{d-q} = \binom{d}{d-d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

- Emiatt a módosult fokszámeloszlás:

$$p'(d') = \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'}.$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle d' \rangle$ átlagos fokszám:

$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d'=0}^{\infty} d' p'(d') = \sum_{d'=0}^{\infty} d' \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \\ &= \sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f)\end{aligned}$$

Az összegzés a „háromszögre” történik, ezért ha felcseréljük a sorrendet: $\sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d$

$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f) = \\ &= (1-f) \sum_{d=0}^{\infty} dp(d) \underbrace{\sum_{d'=0}^d \binom{d-1}{d'-1} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1}}_1 = (1-f) \langle d \rangle\end{aligned}$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

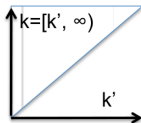
Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle d' \rangle$ átlagos fokszám:

$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d'=0}^{\infty} d' p'(d') = \sum_{d'=0}^{\infty} d' \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \\ &= \sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f)\end{aligned}$$

Az összegzés a „háromszögre” történik, ezért ha felcseréljük a sorrendet: $\sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d$



$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f) = \\ &= (1-f) \sum_{d=0}^{\infty} dp(d) \underbrace{\sum_{d'=0}^d \binom{d-1}{d'-1} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1}}_1 = (1-f) \langle d \rangle\end{aligned}$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

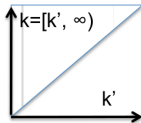
Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle d' \rangle$ átlagos fokszám:

$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d'=0}^{\infty} d' p'(d') = \sum_{d'=0}^{\infty} d' \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \binom{d}{d'} f^{d-d'} (1-f)^{d'} = \\ &= \sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f)\end{aligned}$$

Az összegzés a „háromszögre” történik, ezért ha felcseréljük a sorrendet: $\sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d$



$$\begin{aligned}\langle d' \rangle &= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d p(d) \frac{d(d-1)!}{(d'-1)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1} (1-f) = \\ &= (1-f) \sum_{d=0}^{\infty} dp(d) \underbrace{\sum_{d'=0}^d \binom{d-1}{d'-1} f^{d-d'} (1-f)^{d'-1}}_1 = (1-f) \langle d \rangle\end{aligned}$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle (d')^2 \rangle$:

$$\langle (d')^2 \rangle = \langle d'(d' - 1) - d' \rangle = \langle d'(d' - 1) \rangle - \langle d' \rangle.$$

$$\langle d'(d' - 1) \rangle =$$

$$\sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \frac{d(d-1)(d-2)!}{(d'-2)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} (1-f)^2 =$$

$$(1-f)^2 \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d d(d-1)p(d) \frac{(d-2)!}{(d'-2)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} =$$

$$(1-f)^2 \sum_{d=0}^{\infty} d(d-1)p(d) \underbrace{\sum_{d'=0}^d \binom{d-2}{d'-2}}_1 f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} =$$

$$= (1-f)^2 \langle d(d-1) \rangle.$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

- A módosult $\langle (d')^2 \rangle$:

$$\langle (d')^2 \rangle = \langle d'(d' - 1) - d' \rangle = \langle d'(d' - 1) \rangle - \langle d' \rangle.$$

$$\langle d'(d' - 1) \rangle =$$

$$\sum_{d'=0}^{\infty} \sum_{d=d'}^{\infty} p(d) \frac{d(d-1)(d-2)!}{(d'-2)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} (1-f)^2 =$$

$$(1-f)^2 \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{d'=0}^d d(d-1)p(d) \frac{(d-2)!}{(d'-2)!(d-d')!} f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} =$$

$$(1-f)^2 \sum_{d=0}^{\infty} d(d-1)p(d) \underbrace{\sum_{d'=0}^d \binom{d-2}{d'-2}}_1 f^{d-d'} (1-f)^{d'-2} =$$

$$= (1-f)^2 \langle d(d-1) \rangle.$$

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle (d')^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (d')^2 \rangle &= (1-f)^2 \langle d(d-1) \rangle - \langle d' \rangle = \\ &= (1-f)^2 (\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle) - (1-f) \langle d \rangle = \\ &= (1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle.\end{aligned}$$

- Az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\begin{aligned}\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} &= \frac{(1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle}{(1-f) \langle d \rangle} = (1-f) \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f, \\ &\rightarrow \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f \left(1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \right) \geq 2\end{aligned}$$

- A kritikus f :

$$f_c = \frac{2 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}}{1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}} = \frac{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 2}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1} = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle (d')^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (d')^2 \rangle &= (1-f)^2 \langle d(d-1) \rangle - \langle d' \rangle = \\ &= (1-f)^2 (\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle) - (1-f) \langle d \rangle = \\ &= (1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle.\end{aligned}$$

- Az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\begin{aligned}\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} &= \frac{(1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle}{(1-f) \langle d \rangle} = (1-f) \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f, \\ \rightarrow \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f \left(1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \right) &\geq 2\end{aligned}$$

- A kritikus f :

$$f_c = \frac{2 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}}{1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}} = \frac{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 2}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1} = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

A véletlenszerű meghibásodás tanulmányozása

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A módosult $\langle (d')^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (d')^2 \rangle &= (1-f)^2 \langle d(d-1) \rangle - \langle d' \rangle = \\ &= (1-f)^2 (\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle) - (1-f) \langle d \rangle = \\ &= (1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle.\end{aligned}$$

- Az óriás komponens létezésének feltétele:

$$\begin{aligned}\frac{\langle (d')^2 \rangle}{\langle d' \rangle} &= \frac{(1-f)^2 \langle d^2 \rangle + f(1-f) \langle d \rangle}{(1-f) \langle d \rangle} = (1-f) \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f, \\ \rightarrow \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} + f \left(1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} \right) &\geq 2\end{aligned}$$

- A kritikus f :

$$f_c = \frac{2 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}}{1 - \frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle}} = \frac{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 2}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1} = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

- Egy E–R-gráf esetén:

$$\langle d^2 \rangle = \langle d \rangle (1 + \langle d \rangle),$$

$$\rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{\langle d \rangle},$$

$$\rightarrow \langle d' \rangle_{f_c} = (1 - f_c) \langle d \rangle = 1.$$

Azaz egy E–R-gráfnál addig vesszük el a csúcsokat (éleket), míg a megmaradó rész átlagos fokszáma lecsökken $\langle d' \rangle = 1$ -re.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\langle d^2 \rangle - 1}$$

- Egy **E–R-gráf** esetén:

$$\langle d^2 \rangle = \langle d \rangle (1 + \langle d \rangle),$$

$$\rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{\langle d \rangle},$$

$$\rightarrow \langle d' \rangle_{f_c} = (1 - f_c) \langle d \rangle = 1.$$

Azaz egy E–R-gráfnál addig vesszük el a csúcsokat (éleket), míg a megmaradó rész átlagos fokszáma lecsökken $\langle d' \rangle = 1$ -re.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\langle d^2 \rangle - 1}$$

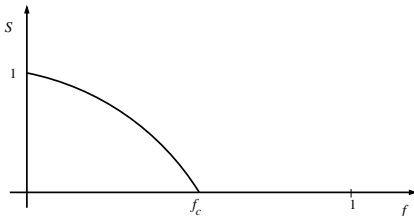
- Egy E–R-gráf esetén:

$$\langle d^2 \rangle = \langle d \rangle (1 + \langle d \rangle),$$

$$\rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{\langle d \rangle},$$

$$\rightarrow \langle d' \rangle_{f_c} = (1 - f_c) \langle d \rangle = 1.$$

Azaz egy E–R-gráfnál addig vesszük el a csúcsokat (éleket), míg a megmaradó rész átlagos fokszáma lecsökken $\langle d' \rangle = 1$ -re.



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

- Egy skálafüggetlen hálózathál:

$$\begin{aligned} \langle d^2 \rangle &\rightarrow \infty \quad (\text{ha } 2 \leq \gamma \leq 3) \\ \rightarrow f_c &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Azaz a skálafüggetlen hálózatok extrém módon robusztusak a véletlenszerű csúcs- (vagy él-) eltávolítással szemben!

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

- Egy skálafüggetlen hálózatonál:

$$\begin{aligned} \langle d^2 \rangle &\rightarrow \infty \quad (\text{ha } 2 \leq \gamma \leq 3) \\ \rightarrow f_c &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Azaz a skálafüggetlen hálózatok extrém módon robusztusak a véletlenszerű csúcs- (vagy él-) eltávolítással szemben!

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

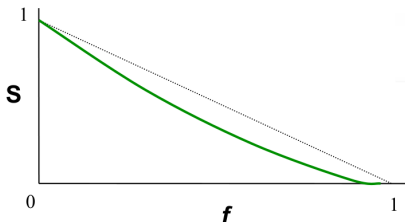
A kritikus f

$$\text{A kritikus } f: f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle d^2 \rangle}{\langle d \rangle} - 1}$$

- Egy skálafüggetlen hálózatonál:

$$\begin{aligned} \langle d^2 \rangle &\rightarrow \infty \quad (\text{ha } 2 \leq \gamma \leq 3) \\ \rightarrow f_c &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Azaz a skálafüggetlen hálózatok extrém módon robusztusak a véletlenszerű csúcs- (vagy él-) eltávolítással szemben!



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Extrém robusztusság

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

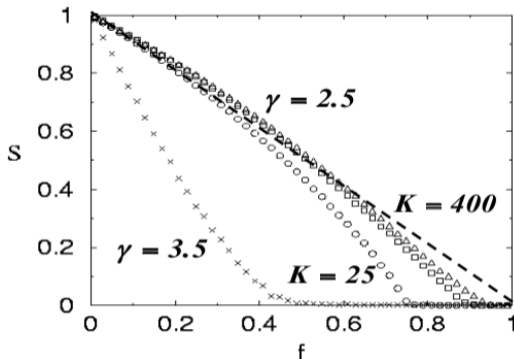
A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Példák:

- Internet, router szint: $N = 228,263$, $\gamma = 2.1 \pm 0.1$
→ $f_c = 0.962$
- Internet, AS szint: $N = 11,164$, $\gamma = 2.1 \pm 0.1$
→ $f_c = 0.996$



Extrém robusztusság

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Miért találkozunk skálafüggetlen hálózatokkal mindenhol?

**→ Egy plauzibilis válasz erre az, hogy a véletlenszerű
meghibásodással szembeni extrém robusztusságuk miatt!**

A robusztusság ára

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Ennek az extrém robusztusságnak ára van...

A robusztusság ára

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Ennek az extrém robusztusságnak ára van...

A skálafüggetlen hálózatok nagyon sebezhetőek a célzott támadásokkal szemben!

Támadással szembeni ellenálló képesség

Hálózatok III.

Hogyan kéne „megtámadni” egy skálafüggetlen hálózatot?

→ A csúcsokat a fokszám szerinti sorrendben kell eltávolítani.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

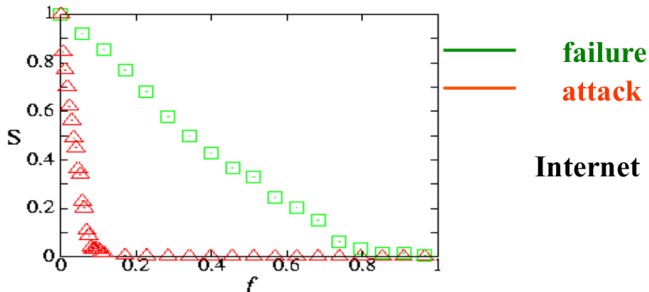
Modularitás

k -klikk perkoláció

Támadással szembeni ellenálló képesség

Hogyan kéne „megtámadni” egy skálafüggetlen hálózatot?

→ A csúcsokat a fokszám szerinti sorrendben kell eltávolítani.



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Támadással szembeni ellenálló képesség

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

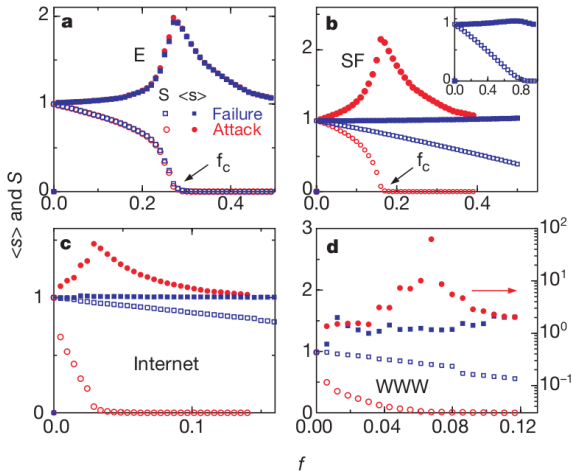
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Támadással szembeni ellenálló képesség

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

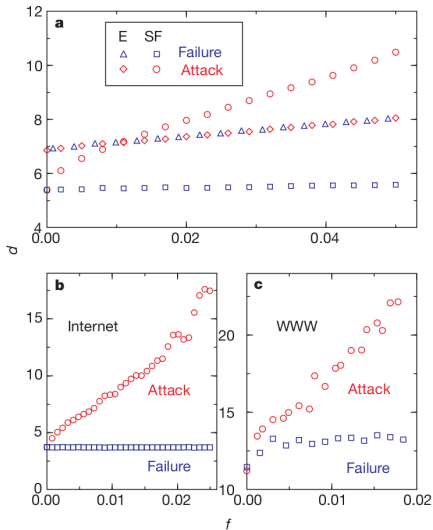
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Támadással szembeni ellenálló képesség

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

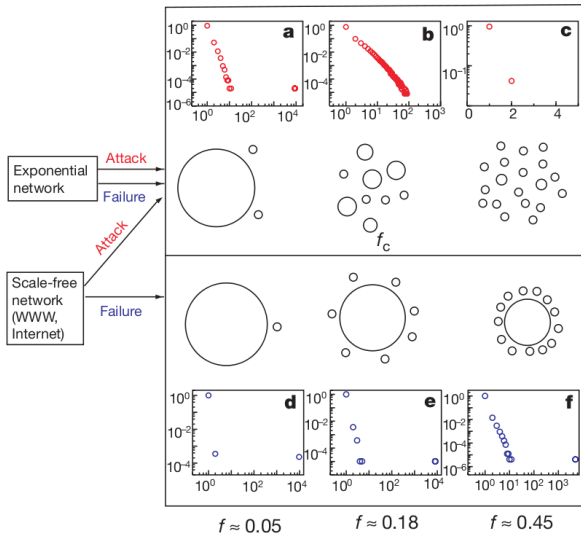
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



dreamstime.com

TERJEDÉSI FOLYAMATOK HÁLÓZATOKON

A terjedési folyamatok fontosak

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

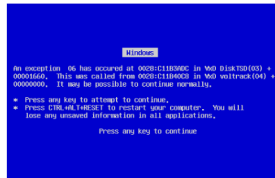
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Hires járványkitörések

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

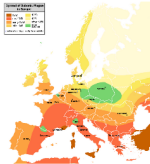
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

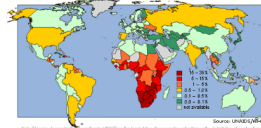
k -klikk perkoláció

The Great Plague



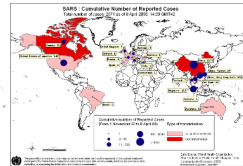
HIV

HIV prevalence in adults, end 2001



Note: This map does not include countries that are not members of the World Bank or countries in the unclassified stage of transition.

SARS



1918 Spanish flu



H1N1 flu

Járványterjedés sebessége?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

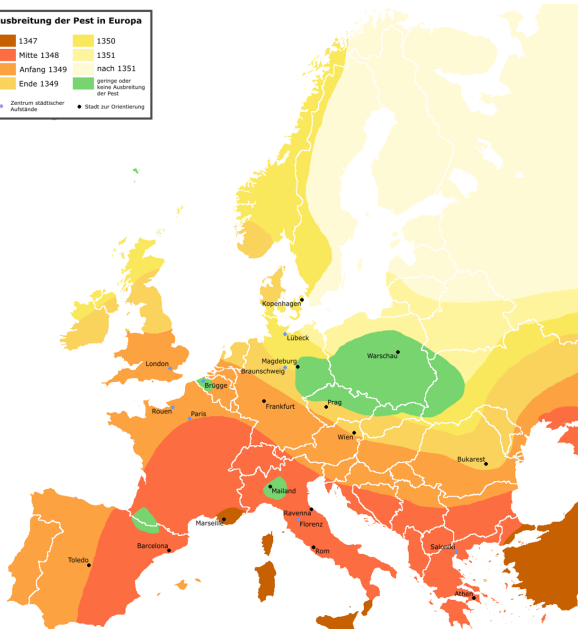
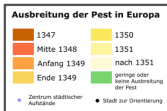
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció



Járványterjedés sebessége?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

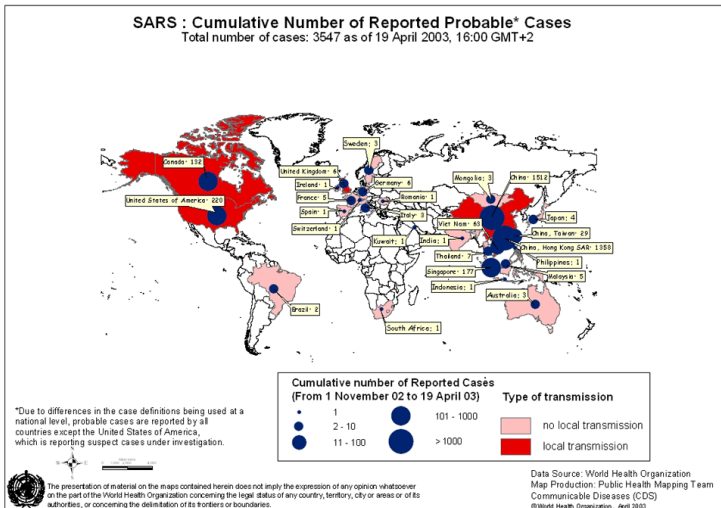
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klíkk perkoláció



Járványterjedés sebessége?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Miért gyorsult fel ennyire?

Járványterjedés sebessége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

<http://www.youtube.com/watch?v=eJ5mKFNcfHg>

Terjedési modellek

Állapotok

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

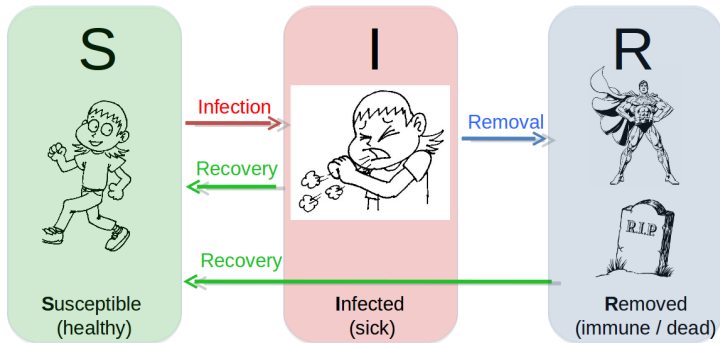
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

A járványterjedési modellekben a csúcok lehetséges állapotai:



SI modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

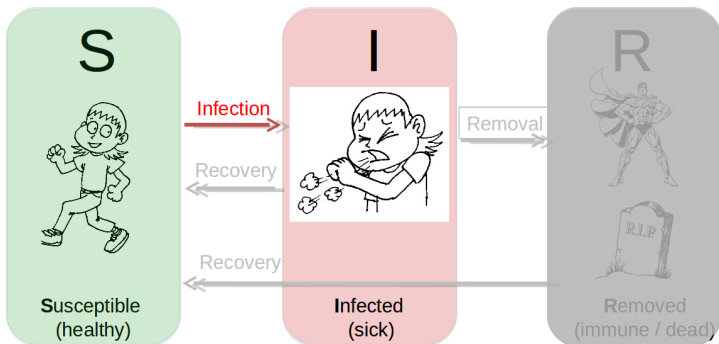
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az SI modell:



Az SIS modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

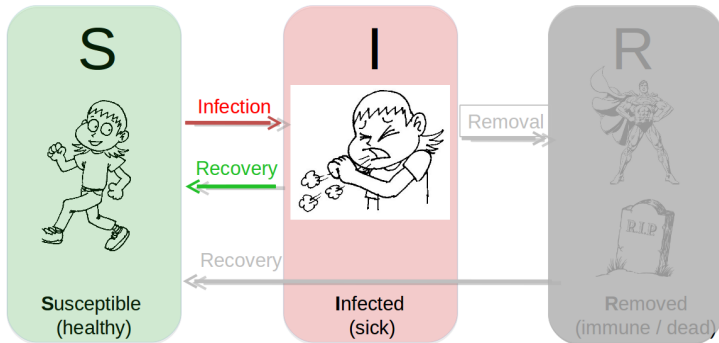
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az SIS modell: (pl. megfázás)



Az SIR modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

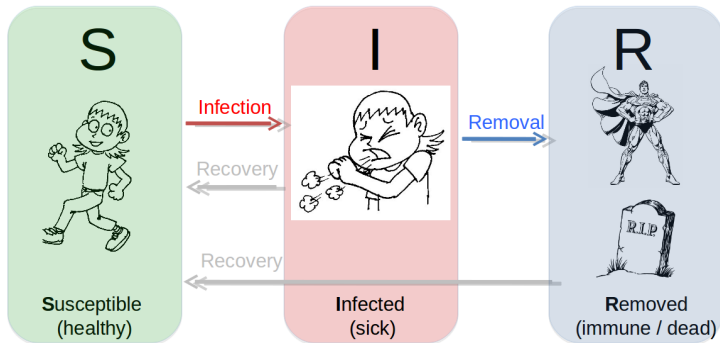
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az SIR modell: (pl. influenza, SARS, himlő, stb.)



Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédtól. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$S \rightarrow I$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Feltevésaink:

- A hálózat homogén, (pl. E-R-gráf), minden csúcsnak nagyjából $\langle d \rangle$ a fokszáma.
- Minden csúcsnál azonos annak valószínűsége, hogy fertőzött szomszédja van.
- Egy egészséges csúcs λ valószínűséggel kapja el a fertőzést egy fertőzött szomszédától. (λ a terjedési ráta).
- Egy fertőzött csúcs μ valószínűséggel gyógyul meg egy időegység alatt.
- A $t = 0$ esetén a kezdő állapotban egy infinitezimálisan kicsi $\rho(t = 0) = \rho_0 \ll 1$ hányada fertőzött a csúcsoknak.

A $\rho(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \underbrace{\langle d \rangle \rho}_{I \text{ szomszédja}} \underbrace{(1 - \rho)}_S - \mu \rho$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{S \rightarrow I}$

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

A diffe. a logisztikus egyenletnek felel meg, ennek megoldása:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \lambda \langle d \rangle \rho(1 - \rho) - \mu\rho, & \rho(t=0) &= \rho_0, \\ \rightarrow \rho(t) &= \left(1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle}\right) \frac{c e^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}}{1 + c e^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}} & c &= \frac{\rho_0}{1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle} - \rho_0}\end{aligned}$$

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

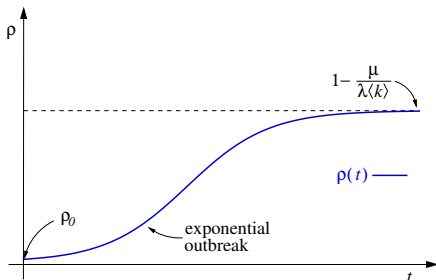
k -klikk perkoláció

Az SIS modell homogén hálózaton

A diffe. a logisztikus egyenletnek felel meg, ennek megoldása:

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda \langle d \rangle \rho(1 - \rho) - \mu\rho, \quad \rho(t=0) = \rho_0,$$
$$\rightarrow \rho(t) = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle}\right) \frac{ce^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}}{1 + ce^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}} \quad c = \frac{\rho_0}{1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle} - \rho_0}$$

Ha $\lambda \langle d \rangle > \mu$:



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

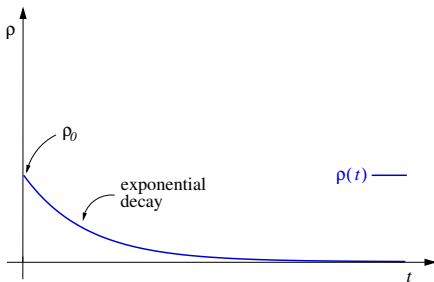
Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

A diffe. a logisztikus egyenletnek felel meg, ennek megoldása:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \lambda \langle d \rangle \rho(1 - \rho) - \mu\rho, & \rho(t=0) &= \rho_0, \\ \rightarrow \rho(t) &= \left(1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle}\right) \frac{c e^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}}{1 + c e^{(\lambda \langle d \rangle - \mu)t}} & c &= \frac{\rho_0}{1 - \frac{\mu}{\lambda \langle d \rangle} - \rho_0}\end{aligned}$$

Ha $\lambda \langle d \rangle < \mu$:



Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

TERJEDÉSI KÜSZÖB (epidemic threshold):

$$\lambda_c \langle d \rangle = \mu \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{\mu}{\langle d \rangle} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda > \lambda_c : & \text{exp. járványkitörés} \\ \lambda < \lambda_c : & \text{exp. lecsengés} \end{cases}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mu = 1$:

$$\lambda_c \langle d \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{1}{\langle d \rangle}$$

Ez nagyon intuitív egy diszkrét időfejlődési dinamikában:

- egy fertőzött csúcs 1 lépés alatt meggyógyul,
- $\langle d \rangle$ szomszédja van, ezért átlagosan $\lambda \langle d \rangle$ másik csúcsot tud megfertőzni egy lépés alatt,
 - ha $\lambda \langle d \rangle < 1$ a járvány gyorsan lecseng,
 - ha $\lambda \langle d \rangle > 1$ a járvány exponenciálisan gyorsan elterjed.

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

TERJEDÉSI KÜSZÖB (epidemic threshold):

$$\lambda_c \langle d \rangle = \mu \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{\mu}{\langle d \rangle} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda > \lambda_c : & \text{exp. járványkitörés} \\ \lambda < \lambda_c : & \text{exp. lecsengés} \end{cases}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mu = 1$:

$$\lambda_c \langle d \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{1}{\langle d \rangle}$$

Ez nagyon intuitív egy diszkrét időfejlődési dinamikában:

- egy fertőzött csúcs 1 lépés alatt meggyógyul,
- $\langle d \rangle$ szomszédja van, ezért átlagosan $\lambda \langle d \rangle$ másik csúcsot tud megfertőzni egy lépés alatt,
 - ha $\lambda \langle d \rangle < 1$ a járvány gyorsan lecseng,
 - ha $\lambda \langle d \rangle > 1$ a járvány exponenciálisan gyorsan elterjed.

Az SIS modell homogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

TERJEDÉSI KÜSZÖB (epidemic threshold):

$$\lambda_c \langle d \rangle = \mu \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{\mu}{\langle d \rangle} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda > \lambda_c : & \text{exp. járványkitörés} \\ \lambda < \lambda_c : & \text{exp. lecsengés} \end{cases}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mu = 1$:

$$\lambda_c \langle d \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_c = \frac{1}{\langle d \rangle}$$

Ez nagyon intuitív egy diszkrét időfejlődési dinamikában:

- egy fertőzött csúcs 1 lépés alatt meggyógyul,
- $\langle d \rangle$ szomszédja van, ezért átlagosan $\lambda \langle d \rangle$ másik csúcsot tud megfertőzni egy lépés alatt,
 - ha $\lambda \langle d \rangle < 1$ a járvány gyorsan lecseng,
 - ha $\lambda \langle d \rangle > 1$ a járvány exponenciálisan gyorsan elterjed.

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).

→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:

- Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).

→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:

- Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).
→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:
 - Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klasterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).
→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:
 - Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).
→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:
 - Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy a hálózat inhomogén, (skálafüggetlen).
→ A HUB-okat és a kis fokszámú csúcsokat külön kell kezelnünk:
 - Legyen ρ_d a d fokszámú csúcsok közt a fertőzöttek hányada.

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{N} \sum_d \rho_d N_d = \sum_d \rho_d p(d).$$

- Annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egyik végén fertőzött csúcs van: Γ .

Tegyük fel, hogy Γ csak ρ -tól függ, (és független pl. a másik végpont fokszámától).

A $\rho_d(t)$ -re vonatkozó diffe.:

$$\frac{d\rho_d}{dt} = \lambda d \Gamma [1 - \rho_d] - \mu \rho_d$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy elértünk egy stacionárius állapotba: $\frac{d\rho_d}{dt} = 0$

$$\rightarrow \mu\rho_d = \lambda d\Gamma [1 - \rho_d] \rightarrow \rho_d = \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

- Számoljuk ki Γ -t. Ha \mathcal{P}_d annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egy d fokszámú csúcsba mutat, akkor $\Gamma = \sum_d \rho_d \mathcal{P}_d$.
- A \mathcal{P}_d -t így lehet megadni:

$$\mathcal{P}_d = \frac{dp(d)}{\langle d \rangle}$$

- Azonban azon az élen nem lehet visszaküldeni a fertőzést amelyiken megérkezett a csúcsba, ezért

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1)p(d)\rho_d = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1)p(d) \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

→ Ez egy önkonzisztens egyenlet Γ -ra!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy elértünk egy stacionárius állapotba: $\frac{d\rho_d}{dt} = 0$

$$\rightarrow \mu\rho_d = \lambda d\Gamma [1 - \rho_d] \rightarrow \rho_d = \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

- Számoljuk ki Γ -t. Ha \mathcal{P}_d annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egy d fokszámú csúcsba mutat, akkor $\Gamma = \sum_d \rho_d \mathcal{P}_d$.
- A \mathcal{P}_d -t így lehet megadni:

$$\mathcal{P}_d = \frac{dp(d)}{\langle d \rangle}.$$

- Azonban azon az élen nem lehet visszaküldeni a fertőzést amelyiken megérkezett a csúcsba, ezért

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \rho_d = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

→ Ez egy önkonzisztens egyenlet Γ -ra!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy elértünk egy stacionárius állapotba: $\frac{d\rho_d}{dt} = 0$

$$\rightarrow \mu\rho_d = \lambda d\Gamma [1 - \rho_d] \rightarrow \rho_d = \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

- Számoljuk ki Γ -t. Ha \mathcal{P}_d annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egy d fokszámú csúcsba mutat, akkor $\Gamma = \sum_d \rho_d \mathcal{P}_d$.
- A \mathcal{P}_d -t így lehet megadni:

$$\mathcal{P}_d = \frac{dp(d)}{\langle d \rangle}.$$

- Azonban azon az élen nem lehet visszaküldeni a fertőzést amelyiken megérkezett a csúcsba, ezért

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1)p(d)\rho_d = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1)p(d) \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

→ Ez egy önkonzisztens egyenlet Γ -ra!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy elértünk egy stacionárius állapotba: $\frac{d\rho_d}{dt} = 0$

$$\rightarrow \mu\rho_d = \lambda d\Gamma [1 - \rho_d] \rightarrow \rho_d = \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

- Számoljuk ki Γ -t. Ha \mathcal{P}_d annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egy d fokszámú csúcsba mutat, akkor $\Gamma = \sum_d \rho_d \mathcal{P}_d$.
- A \mathcal{P}_d -t így lehet megadni:

$$\mathcal{P}_d = \frac{dp(d)}{\langle d \rangle}.$$

- Azonban azon az élen nem lehet visszaküldeni a fertőzést amelyiken megérkezett a csúcsba, ezért

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \rho_d = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

→ Ez egy önkonzisztens egyenlet Γ -ra!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

- Tegyük fel, hogy elértünk egy stacionárius állapotba: $\frac{d\rho_d}{dt} = 0$

$$\rightarrow \mu\rho_d = \lambda d\Gamma [1 - \rho_d] \rightarrow \rho_d = \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

- Számoljuk ki Γ -t. Ha \mathcal{P}_d annak valószínűsége, hogy egy v.v. él egy d fokszámú csúcsba mutat, akkor $\Gamma = \sum_d \rho_d \mathcal{P}_d$.
- A \mathcal{P}_d -t így lehet megadni:

$$\mathcal{P}_d = \frac{dp(d)}{\langle d \rangle}.$$

- Azonban azon az élen nem lehet visszaküldeni a fertőzést amelyiken megérkezett a csúcsba, ezért

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \rho_d = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d\Gamma}{\mu + \lambda d\Gamma}$$

→ Ez egy önkonzisztens egyenlet Γ -ra!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma}$$

- Hogy lehetne megoldani?

→ Grafikusan, hiszen
csak a kvalitatív
viselkedésre
vagyunk kíváncsiak.

- $\Gamma = 0$ mindig egy triviális megoldás ahol nincs fertőzés.
- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

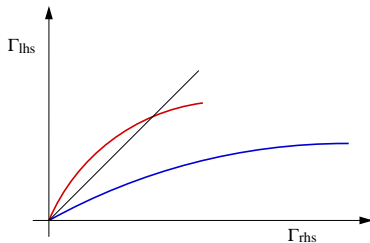
Modularitás

k -klikk perkoláció

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma}$$

- Hogy lehetne megoldani?

→ Grafikusan, hiszen csak a kvalitatív viselkedésre vagyunk kíváncsiak.



- $\Gamma = 0$ mindig egy triviális megoldás ahol nincs fertőzés.
- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

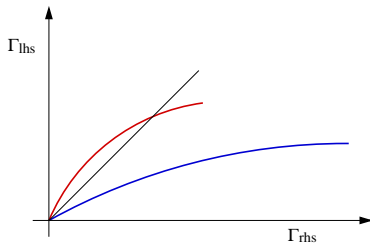
Modularitás

k -klikk perkoláció

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma}$$

- Hogy lehetne megoldani?

→ Grafikusan, hiszen csak a kvalitatív viselkedésre vagyunk kíváncsiak.



- $\Gamma = 0$ mindig egy triviális megoldás ahol nincs fertőzés.
- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

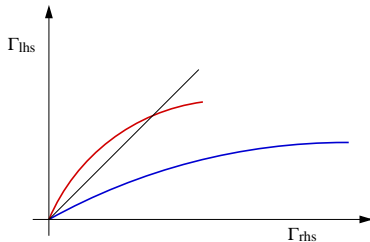
Modularitás

k -klikk perkoláció

$$\Gamma = \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma}$$

- Hogy lehetne megoldani?

→ Grafikusan, hiszen csak a kvalitatív viselkedésre vagyunk kíváncsiak.



- $\Gamma = 0$ mindig egy triviális megoldás ahol nincs fertőzés.
- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d d(d-1) p(d) \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$$

$$\frac{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}{\langle d \rangle} \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

→ **TERJEDÉSI KÜSZÖB** (epidemic threshold):

$$\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Ha $\mu = 1$ az egyszerűség kedvéért, akkor $\lambda \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$.

- Azon hálózatok esetén ahol $\langle d^2 \rangle \rightarrow \infty$, ott $\lambda_c = 0!$
- → A $\gamma < 3$ skálafüggetlen hálózatokon a terjedési küszöb nullához tart!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d d(d-1) p(d) \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$$

$$\frac{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}{\langle d \rangle} \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

- **TERJEDÉSI KÜSZÖB** (epidemic threshold):

$$\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Ha $\mu = 1$ az egyszerűség kedvéért, akkor $\lambda \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$.

- Azon hálózatok esetén ahol $\langle d^2 \rangle \rightarrow \infty$, ott $\lambda_c = 0!$
- → A $\gamma < 3$ skálafüggetlen hálózatokon a terjedési küszöb nullához tart!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d d(d-1) p(d) \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$$

$$\frac{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}{\langle d \rangle} \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

- **TERJEDÉSI KÜSZÖB** (epidemic threshold):

$$\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Ha $\mu = 1$ az egyszerűség kedvéért, akkor $\lambda \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$.

- Azon hálózatok esetén ahol $\langle d^2 \rangle \rightarrow \infty$, ott $\lambda_c = 0!$
- → A $\gamma < 3$ skálafüggetlen hálózatokon a terjedési küszöb nullához tart!

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d d(d-1) p(d) \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$$

$$\frac{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}{\langle d \rangle} \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

- **TERJEDÉSI KÜSZÖB** (epidemic threshold):

$$\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Ha $\mu = 1$ az egyszerűség kedvéért, akkor $\lambda \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$.

- Azon hálózatok esetén ahol $\langle d^2 \rangle \rightarrow \infty$, ott $\lambda_c = 0!$
- → **A $\gamma < 3$ skálafüggetlen hálózatokon a terjedési küszöb nullához tart!**

SIS modell inhomogén hálózaton

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A nemtriviális megoldás létezésének feltétele:

$$\left. \frac{d}{d\Gamma} \left[\frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d (d-1) p(d) \frac{\lambda d \Gamma}{\mu + \lambda d \Gamma} \right] \right|_{\Gamma=0} \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\langle d \rangle} \sum_d d(d-1) p(d) \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$$

$$\frac{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}{\langle d \rangle} \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

- **TERJEDÉSI KÜSZÖB** (epidemic threshold):

$$\frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Ha $\mu = 1$ az egyszerűség kedvéért, akkor $\lambda \geq \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$.

- Azon hálózatok esetén ahol $\langle d^2 \rangle \rightarrow \infty$, ott $\lambda_c = 0!$
- → **A $\gamma < 3$ skálafüggetlen hálózatokon a terjedési küszöb nullához tart!**

A $\lambda_c = 0$ következményei

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Akármilyen gyenge a fertőzés, meg fog maradni,
- és egy véges hányada a csúcsoknak mindig fertőzött lesz.

SIR modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Homogén hálózatok:

$$\begin{aligned}1 &= S + \rho + R \\ \frac{dS}{dt} &= -\lambda \langle d \rangle \rho S \\ \frac{d\rho}{dt} &= \lambda \langle d \rangle \rho S - \mu \rho \\ \frac{dR}{dt} &= \mu \rho\end{aligned}$$

Inhomogén hálózatok:

$$\begin{aligned}1 &= S_d + \rho_d + R_d \\ \frac{dS_d}{dt} &= -\lambda d \Gamma S_d \\ \frac{d\rho_d}{dt} &= \lambda d \Gamma S_d - \mu \rho_d \\ \frac{dR_d}{dt} &= \mu \rho_d\end{aligned}$$

SIR modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

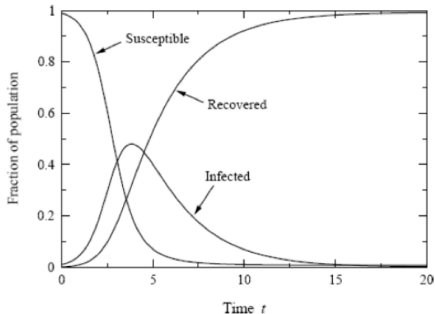
k -klikk perkoláció

Homogén hálózatok:

$$\begin{aligned}1 &= S + \rho + R \\ \frac{dS}{dt} &= -\lambda \langle d \rangle \rho S \\ \frac{d\rho}{dt} &= \lambda \langle d \rangle \rho S - \mu \rho \\ \frac{dR}{dt} &= \mu \rho\end{aligned}$$

Inhomogén hálózatok:

$$\begin{aligned}1 &= S_d + \rho_d + R_d \\ \frac{dS_d}{dt} &= -\lambda d \Gamma S_d \\ \frac{d\rho_d}{dt} &= \lambda d \Gamma S_d - \mu \rho_d \\ \frac{dR_d}{dt} &= \mu \rho_d\end{aligned}$$



SIR modell

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Korai fázis: kvalitatíven ugyanúgy viselkedik mint az SIS:

Homogén hálózatok:

$$\lambda_c = \frac{1}{\langle d \rangle}$$

Inhomogén hálózatok:

$$\lambda_c = \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle - \langle d \rangle}$$

Járványterjedés előrejelzése

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

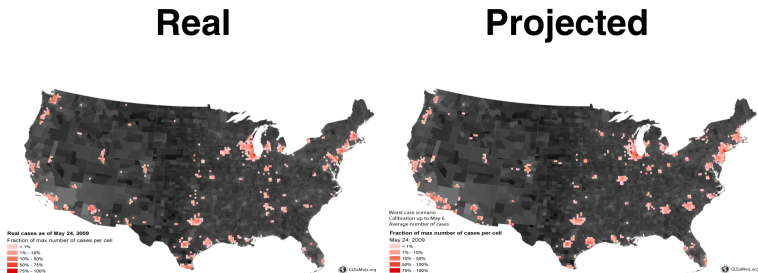
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció

- Alessandro Vespignani csoportja.

A H1N1 terjedésének jóslása 2009-ben:



<http://www.youtube.com/watch?v=ONEOc-MTm1Q>

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

HÁLÓZATI CSOPORTKERESÉS

Csoportok: a hálózatok mezoszkopikus skálája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

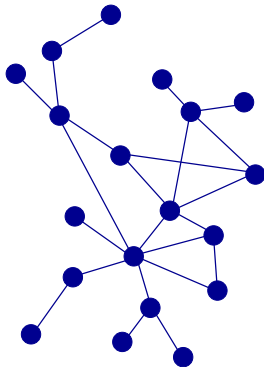
Példák

Hierarchikus klaszterezés

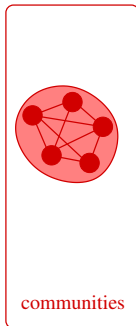
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

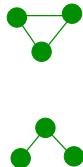
k -klikk perkoláció



whole network: $p(k), \langle l \rangle$



communities



motifs



individual nodes: $k_i c_i$

Mi az, hogy csoport egy hálózatban?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Csoportok, modulok, klaszterek, vagy csoportosulások: sűrű részgráfok, melyekhez a tagok erősebben kapcsolódnak mint a hálózat többi részéhez. (Nincs egy általánosan elfogadott definíció).

Példák:

- Egy család, egy baráti kör vagy egy munkahelyi közösség az emberi kapcsolathálóban.
- Azonos funkcióval rendelkező fehérjék csoportja egy fehérjekölcsönhatási hálózatban.
- Azonos témájú, egymásra sűrűn linkelő weboldalak.
- ...

Mi az, hogy csoport egy hálózatban?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Csoportok, modulok, klaszterek, vagy csoportosulások: sűrű részgráfok, melyekhez a tagok erősebben kapcsolódnak mint a hálózat többi részéhez. (Nincs egy általánosan elfogadott definíció).

Példák:

- Egy család, egy baráti kör vagy egy munkahelyi közösség az emberi kapcsolathálóban.
- Azonos funkcióval rendelkező fehérjék csoportja egy fehérjekölcsönhatási hálózatban.
- Azonos témájú, egymásra sűrűn linkelő weboldalak.
- ...

Mi az, hogy csoport egy hálózatban?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Csoportok, modulok, klaszterek, vagy csoportosulások: sűrű részgráfok, melyekhez a tagok erősebben kapcsolódnak mint a hálózat többi részéhez. (Nincs egy általánosan elfogadott definíció).

Példák:

- Egy család, egy baráti kör vagy egy munkahelyi közösség az emberi kapcsolathálóban.
- Azonos funkcióval rendelkező fehérjék csoportja egy fehérjekölcsönhatási hálózatban.
- Azonos témájú, egymásra sűrűn linkelő weboldalak.
- ...

Mi az, hogy csoport egy hálózatban?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Csoportok, modulok, klaszterek, vagy csoportosulások: sűrű részgráfok, melyekhez a tagok erősebben kapcsolódnak mint a hálózat többi részéhez. (Nincs egy általánosan elfogadott definíció).

Példák:

- Egy család, egy baráti kör vagy egy munkahelyi közösség az emberi kapcsolathálóban.
- Azonos funkcióval rendelkező fehérjék csoportja egy fehérjekölcsönhatási hálózatban.
- Azonos témájú, egymásra sűrűn linkelő weboldalak.
- ...

Mi az, hogy csoport egy hálózatban?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Csoportok, modulok, klaszterek, vagy csoportosulások: sűrű részgráfok, melyekhez a tagok erősebben kapcsolódnak mint a hálózat többi részéhez. (Nincs egy általánosan elfogadott definíció).

Példák:

- Egy család, egy baráti kör vagy egy munkahelyi közösség az emberi kapcsolathálóban.
- Azonos funkcióval rendelkező fehérjék csoportja egy fehérjekölcsönhatási hálózatban.
- Azonos témájú, egymásra sűrűn linkelő weboldalak.
- ...

Példák csoportokra

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

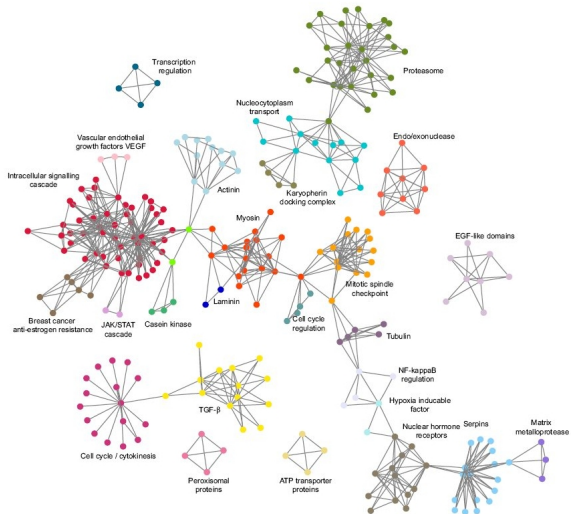
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Példák csoportokra

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

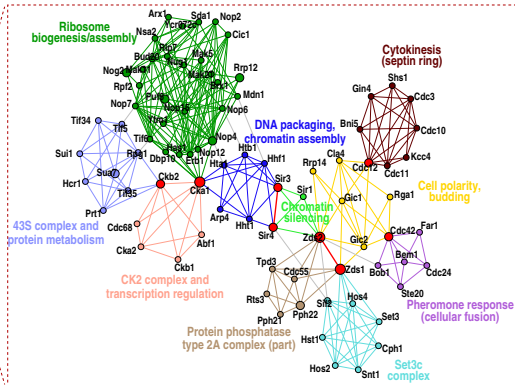
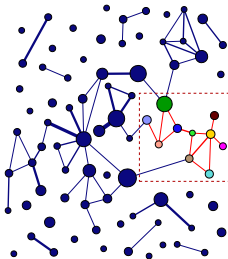
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k-klikk perkoláció



Példák csoportokra

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

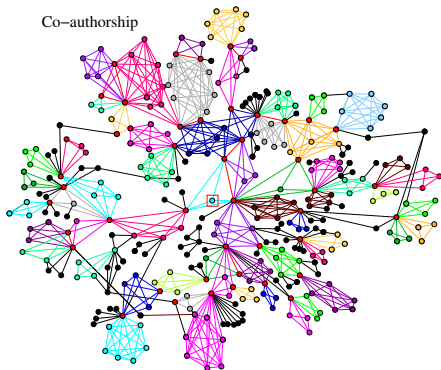
Példák

Hierarchikus klaszterezés

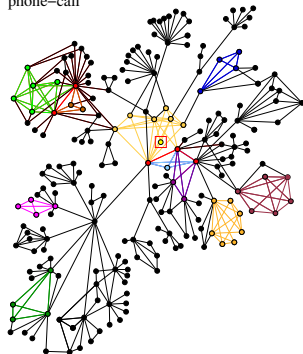
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



phone-call



Csoportkeresés fontossága

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Miért fontosak a csoportok?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A hálózati csoportkeresés fontos...

- adat klaszterezés,
- ajánló rendszerek,
- egy nagyon érdekes köztes szerveződési szint a csúcsok és a teljes hálózat szintje között,
- csoportokon belül gyors a terjedés, közöttük lassabb,
- fehérjefunkció jóslás.

A csoportkereső módszerek sokfélesége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Legalább 40-50 különböző módszer van a piacon...
Melyiket válasszuk?

Néhány szempont:

- globális módszerek \leftrightarrow lokális csop. def.,
- paraméterek száma?
- rendszerméret \leftrightarrow a módszer erőforrás igénye,
- átfedő csoportok \leftrightarrow izolált csoportok.

A csoportkereső módszerek sokfélesége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Legalább 40-50 különböző módszer van a piacon...
Melyiket válasszuk?

Néhány szempont:

- globális módszerek \leftrightarrow lokális csop. def.,
- paraméterek száma?
- rendszerméret \leftrightarrow a módszer erőforrás igénye,
- átfedő csoportok \leftrightarrow izolált csoportok.

A csoportkereső módszerek sokfélesége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Legalább 40-50 különböző módszer van a piacon...
Melyiket válasszuk?

Néhány szempont:

- globális módszerek \leftrightarrow lokális csop. def.,
- paraméterek száma?
- rendszerméret \leftrightarrow a módszer erőforrás igénye,
- átfedő csoportok \leftrightarrow izolált csoportok.

A csoportkereső módszerek sokfélesége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Legalább 40-50 különböző módszer van a piacon...
Melyiket válasszuk?

Néhány szempont:

- globális módszerek \leftrightarrow lokális csop. def.,
- paraméterek száma?
- rendszerméret \leftrightarrow a módszer erőforrás igénye,
- átfedő csoportok \leftrightarrow izolált csoportok.

A csoportkereső módszerek sokfélesége

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Legalább 40-50 különböző módszer van a piacon...
Melyiket válasszuk?

Néhány szempont:

- globális módszerek \leftrightarrow lokális csop. def.,
- paraméterek száma?
- rendszerméret \leftrightarrow a módszer erőforrás igénye,
- átfedő csoportok \leftrightarrow izolált csoportok.

Hierarchikus klaszterezés

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klíkk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy dendrogram.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

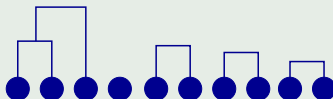
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

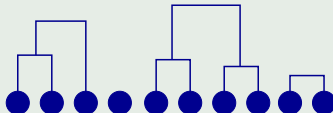
A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

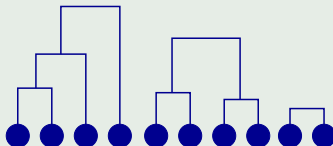
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

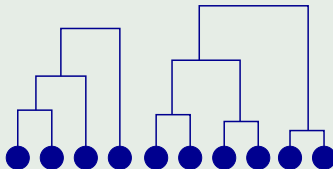
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Általános adatstruktúrákon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

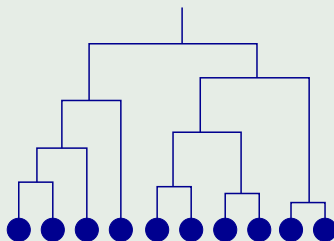
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hasonlóság (vagy távolság) az adatpontok között,,
- agglomeratív eljárás, felépül egy **dendrogram**.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Hálózatokon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

**Hierarchikus
klaszterezés**

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- adatpontok \rightarrow csúcsok,

Hierarchikus klaszterezés

Hálózatokon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- adatpontok \rightarrow csúcsok,
- hasonlóság (vagy távolság)?

Hierarchikus klaszterezés

Hálózatokon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- adatpontok \rightarrow csúcsok,
- hasonlóság (vagy távolság):
 - a független utak száma,

Hierarchikus klaszterezés

Hálózatokon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- adatpontok \rightarrow csúcsok,
- hasonlóság (vagy távolság):
 - a független utak száma,
 - a sor (oszlop) hasonlósága a szomszédsági mátrixban:

$$s_{ij} = \sqrt{\sum_k (A_{ik} - A_{jk})^2}$$

Hierarchikus klaszterezés

Hálózatokon

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

**Hierarchikus
klaszterezés**

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- adatpontok \rightarrow csúcsok,
- hasonlóság (vagy távolság):
 - a független utak száma,
 - a sor (oszlop) hasonlósága a szomszédsági mátrixban:

$$s_{ij} = \sqrt{\sum_k (A_{ik} - A_{jk})^2}$$

- Pearson-korreláció:

$$s_{ij} = \frac{\sum_k (A_{ik} - \mu_i)(A_{jk} - \mu_j)}{N\sigma_i\sigma_j},$$

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_k A_{ik}, \quad \sigma_i = \sqrt{\sum_k (A_{ik} - \mu_i)^2}$$

Hierarchikus klaszterezés

Hátulütők

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

**Hierarchikus
klaszterezés**

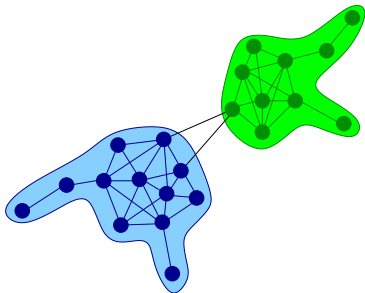
A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A sorozatos összeolvasztások során az eltérő csoportmagok egyesülése megelőzi a gyengén kapcsolódó csoportperifériák egyesítését a maggal.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Hátulütők

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

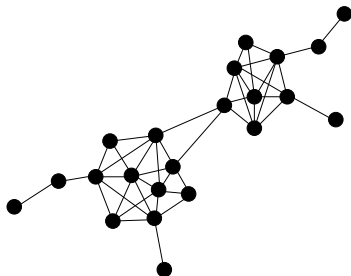
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A sorozatos összeolvasztások során az eltérő csoportmagok egyesülése megelőzi a gyengén kapcsolódó csoportperifériák egyesítését a maggal.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Hátulütők

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

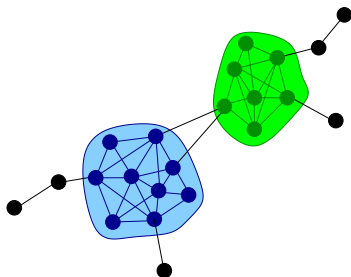
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A sorozatos összeolvasztások során az eltérő csoportmagok egyesülése megelőzi a gyengén kapcsolódó csoportperifériák egyesítését a maggal.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Hátulütők

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

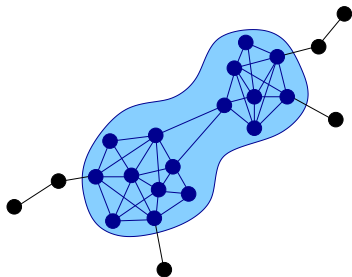
A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A sorozatos összeolvasztások során az eltérő csoportmagok egyesülése megelőzi a gyengén kapcsolódó csoportperifériák egyesítését a maggal.

Szemléltetés:



Hierarchikus klaszterezés

Hátulütők

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

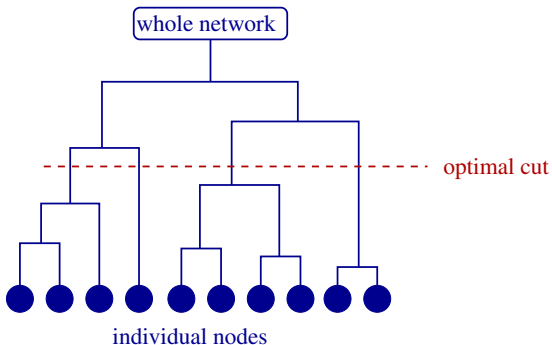
**Hierarchikus
klaszterezés**

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hol kell elválni a dendrogramot?



A Girvan–Newman-algoritmus

Motiváció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

**A Girvan–Newman-
algoritmus**

Modularitás

k -klikk perkoláció

Miként lehetne elkerülni a túl korai csoportmag összeolvadásokat?

A Girvan–Newman-algoritmus

Motiváció

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Miként lehetne elkerülni a túl korai csoportmag összeolvadásokat?

→ Úgy, hogy átállunk egy **felosztó (divizív)** módszerre, melynél a **csoportok között húzódó éleket távolítjuk el.**

A Girvan–Newman-algoritmus

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

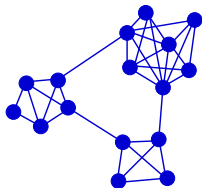
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A csoportok között húzódó éleknek **nagy** a **betweenness** értéke:



Az algoritmus

- 1) betweenness számolás minden élre,
- 2) a legnagyobb b -vel rendelkező él törlése,
ha ez által a hálózat szétesik két izolált komponensre, akkor
frissítjük a dendrogramot,
→ vissza az 1)-es lépéshez

A Girvan–Newman-algoritmus

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

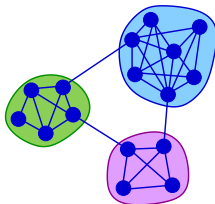
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A csoportok között húzódó éleknek **nagy a betweenness** értéke:



Az algoritmus

- 1) betweenness számolás minden élre,
- 2) a legnagyobb b -vel rendelkező él törlése,
ha ez által a hálózat szétesik két izolált komponensre, akkor
frissítjük a dendrogramot,
→ vissza az 1)-es lépéshez

A Girvan–Newman-algoritmus

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

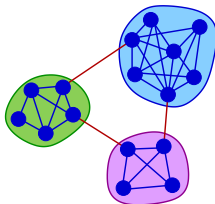
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A csoportok között húzódó éleknek **nagy a betweenness** értéke:



Az algoritmus

- 1) betweenness számolás minden élre,
- 2) a legnagyobb b -vel rendelkező él törlése,
ha ez által a hálózat szétesik két izolált komponensre, akkor
frissítjük a dendrogramot,
→ vissza az 1)-es lépéshez

A Girvan–Newman-algoritmus

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

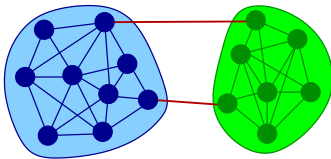
klaszterezés

**A Girvan–Newman-
algoritmus**

Modularitás

k -klikk perkoláció

A betweenness újraszámolása minden vágás után nagyon fontos:



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

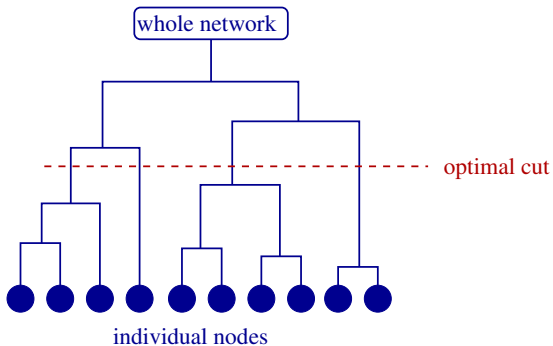
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hol kell elvágni a dendrogramot?



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet az egyes csoportok minőségét megmérni?

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet az egyes csoportok minőségét megmérni?
 - Hasonlítsuk össze a csoport belső szerkezetét egy véletlenszerűen áthuzalozott hálózatban kapott belső szerkezettel ugyanazon csoporttagok között!

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet az egyes csoportok minőségét megmérni?
- Hasonlítsuk össze a csoport belső szerkezetét egy véletlenszerűen áthuzalozott hálózatban kapott belső szerkezettel ugyanazon csoporttagok között!
- „Jó minőségű” csoportok: sokkal több belső él mint a véletlenszerű esetben.
 - „Rossz minőségű” csoportok: nagyjából annyi (vagy akár kevesebb) belső él mint a véletlenszerűen áthuzalozott esetben.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet az egyes csoportok minőségét megmérni?
- Hasonlítsuk össze a csoport belső szerkezetét egy véletlenszerűen áthuzalozott hálózatban kapott belső szerkezettel ugyanazon csoporttagok között!
- „Jó minőségű” csoportok: sokkal több belső él mint a véletlenszerű esetben.
 - „Rossz minőségű” csoportok: nagyjából annyi (vagy akár kevesebb) belső él mint a véletlenszerűen áthuzalozott esetben.
- Mi legyen a referencia véletlengráf-modell?

- Hogyan lehet az egyes csoportok minőségét megmérni?
 - Hasonlítsuk össze a csoport belső szerkezetét egy véletlenszerűen áthuzalozott hálózatban kapott belső szerkezettel ugyanazon csoporttagok között!
 - „Jó minőségű” csoportok: sokkal több belső él mint a véletlenszerű esetben.
 - „Rossz minőségű” csoportok: nagyjából annyi (vagy akár kevesebb) belső él mint a véletlenszerűen áthuzalozott esetben.
- Mi legyen a referencia véletlengráf-modell?
 - A konfigurációs modell, mert az pontosan veszi figyelembe a fokszámeloszlást.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

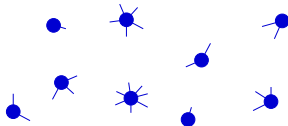
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



Modularitás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

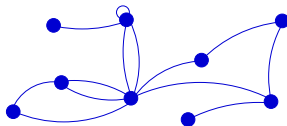
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

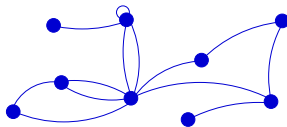
k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

$$\mathcal{P}(i-j) = \frac{d_i d_j}{2M}$$

Modularitás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

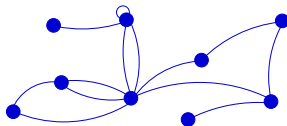
A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

$$\mathcal{P}(i-j) = \frac{d_i d_j}{2M}$$

- Mekkora az α csoporton belül várható élek száma?

Modularitás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

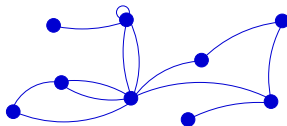
A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

$$\mathcal{P}(i-j) = \frac{d_i d_j}{2M}$$

- Mekkora az α csoporton belül várható élek száma?

- az i és a többi csoporttag közti élek várható száma: $M_{i\alpha} = d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M}$.

Modularitás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

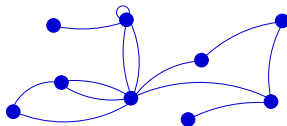
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

$$\mathcal{P}(i-j) = \frac{d_i d_j}{2M}$$

- Mekkora az α csoporton belül várható élek száma?

- az i és a többi csoporttag közti élek várható száma: $M_{i\alpha} = d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M}$.
- felösszegezvén a csoporttagokra az α belső éleinek kétszeresét kapjuk:

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha} d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M}.$$

Modularitás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

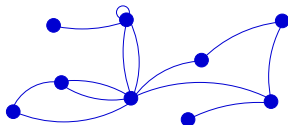
A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- A konfigurációs modell:



- Mennyi az i és j közti él valószínűsége?

$$\mathcal{P}(i-j) = \frac{d_i d_j}{2M}$$

- Mekkora az α csoporton belül várható élek száma?

- az i és a többi csoporttag közti élek várható száma: $M_{i\alpha} = d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M}$.

- felösszegezvén a csoporttagokra az α belső éleinek kétszeresét kapjuk:

$$M_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha} d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M}.$$

→ Az α csoport belső éleinek relatív hányada:

$$\frac{M_\alpha}{M} = \frac{1}{2M} \sum_{i \in \alpha} d_i \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M} = \sum_{i \in \alpha} \frac{d_i}{2M} \sum_{j \in \alpha} \frac{d_j}{2M} = \left[\sum_{i \in \alpha} \frac{d_i}{2M} \right]^2$$

- Az α csoport modularitása:

$$Q_\alpha \equiv \underbrace{\frac{l_\alpha}{M}}_{\text{létező}} - \underbrace{\left(\frac{d_\alpha}{2M}\right)^2}_{\text{konf. modellben várt}}$$

$$l_\alpha : \alpha \text{ belső élei ,}$$
$$d_\alpha = \sum_{i \in \alpha} d_i$$

- A teljes csoportfelbontás modularitása:

$$Q = \sum_{\alpha} Q_\alpha = \sum_{\alpha} \left[\frac{l_\alpha}{M} - \left(\frac{d_\alpha}{2M}\right)^2 \right]$$

- Egy alternatív, ekvivalens formája Q -nak:

$$Q = \frac{1}{2M} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{d_i d_j}{2M} \right) \delta(\alpha_i, \alpha_j)$$

Modularitás

Szemléltetés

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

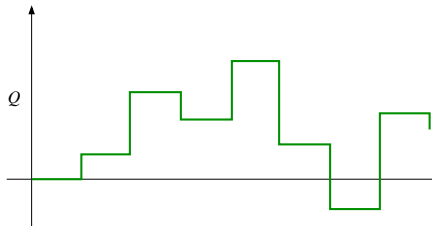
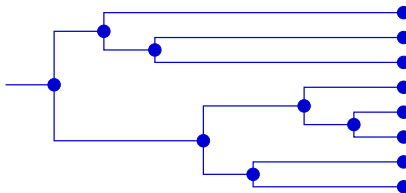
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Modularitás

Szemléltetés

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

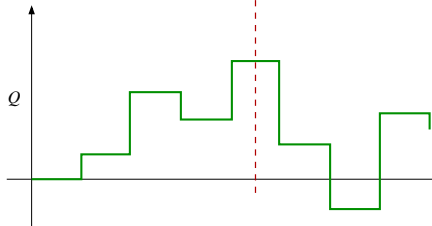
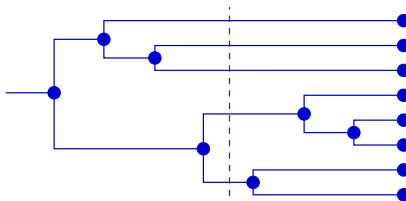
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Modularitás

Szemléltetés

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

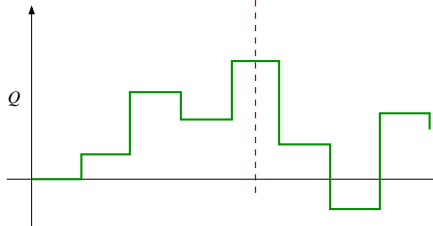
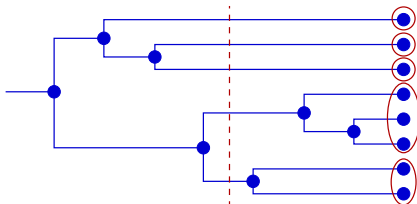
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



A G-N-módszerrel talált, max. Q-nak megfelelő csoportok

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

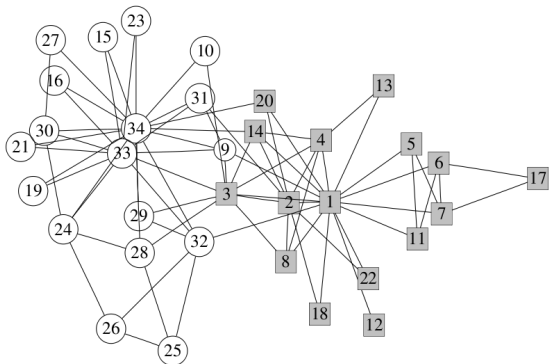
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Modularitás optimalizálás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Ha a modularitás alapján választjuk ki a legjobb csoportfelbontást, akkor miért ne próbálhatnánk meg direktben Q -t maximalizálni?
- A legnagyobb Q -nak megfelelő felbontás megkeresése egy NP-teljes probléma.
- Ettől függetlenül hatékony algoritmusok adhatók meg Q optimalizálására.

Modularitás optimalizálás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Ha a modularitás alapján választjuk ki a legjobb csoportfelbontást, akkor miért ne próbálhatnánk meg direktben Q -t maximalizálni?
- A legnagyobb Q -nak megfelelő felbontás megkeresése egy NP-teljes probléma.
 - Ettől függetlenül hatékony algoritmusok adhatók meg Q optimalizálására.

Modularitás optimalizálás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Ha a modularitás alapján választjuk ki a legjobb csoportfelbontást, akkor miért ne próbálhatnánk meg direktben Q -t maximalizálni?
 - A legnagyobb Q -nak megfelelő felbontás megkeresése egy NP-teljes probléma.
- Ettől függetlenül hatékony algoritmusok adhatók meg Q optimalizálására.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Mohó algoritmus

- A kezdeti állapotban minden csúcs egy külön csoportot alkot.
- Minden lépésnél azt a két csoportot olvasztjuk össze, mely által a legnagyobb mértékben növeljük a modularitást.
- Ha Q nem növelhető tovább ezen a módon, akkor megállunk.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Mohó algoritmus

- A kezdeti állapotban minden csúcs egy külön csoportot alkot.
- Minden lépésnél azt a két csoportot olvasztjuk össze, mely által a legnagyobb mértékben növeljük a modularitást.
- Ha Q nem növelhető tovább ezen a módon, akkor megállunk.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Mohó algoritmus

- A kezdeti állapotban minden csúcs egy külön csoportot alkot.
- Minden lépésnél azt a két csoportot olvasztjuk össze, mely által a legnagyobb mértékben növeljük a modularitást.
- Ha Q nem növelhető tovább ezen a módon, akkor megállunk.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szimulált hőkezelés

- Egy véletlenszerű csoportfelbontásból indulunk ki.
- Vagy csoportok közti tagcserékkel, vagy véletlenszerű csoport-összeolvasztással, illetve szétvágással próbálkozunk.
- Egy adott lépés elfogadási valószínűsége:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{ha } \Delta Q \geq 0 \\ \exp\left(\frac{\Delta Q}{T}\right) & \text{ha } \Delta Q < 0 \end{cases}$$

- Lassan csökkentjük a T paramétert, és a rendszer belekonvergál egy lokális optimumba.

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Spektrális módszerek,

M. E. J. Newman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103**, 8577 (2006)

- Extremal optimization,

J. Duch and A. Arenas, *Phys. Rev. E* **72**, 027104 (2005)

- etc.

A felbontási határ problémája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

A modularitás maximalizálás nagy hátulütője:

Felbontási határa van: ha egy csoport belső éleinek száma $l_\alpha < \sqrt{M/2}$, akkor azt nem tudjuk feltárni!

A felbontási határ problémája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

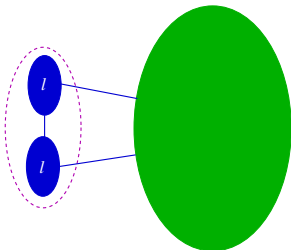
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Vizsgáljuk meg, hogy mikor nagyobb a modularitás az alábbi példában:



$$Q_E = Q_0 + \frac{2m+1}{M} - \frac{(2m+4)^2}{4M^2}$$

$$Q_K = Q_0 + \frac{2m}{M} - \frac{2(m+2)^2}{4M^2}$$

Akkor lesz kedvezőbb külön csoportként kezelni őket, ha

$$\rightarrow Q_K - Q_E = \frac{2m^2 + 8m + 8}{4M^2} - \frac{1}{M} > 0.$$

Ez vezető rendben a következő feltételnek felel meg:

$$l > \sqrt{M/2}.$$

Ez egyben azt jelenti, hogy ha egy csoportnak kevesebb belső éle van, mint $\sqrt{M/2}$, és nem izolált, akkor nincs esélyünk a modularitás maximalizálásával megtalálni.

A felbontási határ problémája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

● Hogyan lehet megkerülni a felbontási határ problémáját?

- Bevezetünk plusz egy paramétert, amivel szabályozható a felbontási határ:

$$Q = \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}}{M} - \gamma \frac{d_{\alpha}^2}{4M^2} = \frac{1}{2M} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \gamma \frac{d_i d_j}{2M} \right) \delta(\alpha_i, \alpha_j)$$

(Ha γ nagy, a feltárt csoportok kicsik, ha γ kicsi, a feltárt csoportok nagyok.)

- Teljes egészében elvetjük a modularitást és lokális módszerekre térünk át.

A felbontási határ problémája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet megkerülni a felbontási határ problémáját?

- Bevezetünk plusz egy paramétert, amivel szabályozható a felbontási határ:

$$Q = \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}}{M} - \gamma \frac{d_{\alpha}^2}{4M^2} = \frac{1}{2M} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \gamma \frac{d_i d_j}{2M} \right) \delta(\alpha_i, \alpha_j)$$

(Ha γ nagy, a feltárt csoportok kicsik, ha γ kicsi, a feltárt csoportok nagyok.)

- Teljes egészében elvetjük a modularitást és lokális módszerekre térünk át.

A felbontási határ problémája

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Hogyan lehet megkerülni a felbontási határ problémáját?

- Bevezetünk plusz egy paramétert, amivel szabályozható a felbontási határ:

$$Q = \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}}{M} - \gamma \frac{d_{\alpha}^2}{4M^2} = \frac{1}{2M} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \gamma \frac{d_i d_j}{2M} \right) \delta(\alpha_i, \alpha_j)$$

(Ha γ nagy, a feltárt csoportok kicsik, ha γ kicsi, a feltárt csoportok nagyok.)

- Teljes egészében elvetjük a modularitást és lokális módszerekre térünk át.

Átfedő csoportok

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

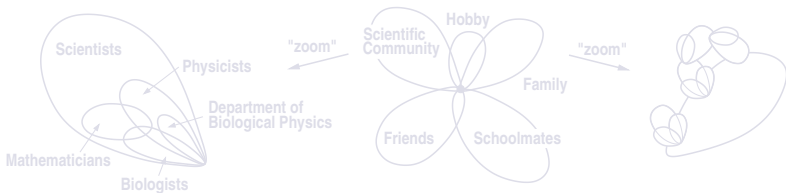
Modularitás

k -klikk perkoláció

A csoportok átfedhetnek egymással:

- Mindenki egyszerre tagja a családjának és a baráti körének,
- Egyes fehérvérjének több funkciója is van, így több csoportban is szerepelhetnek

A csoportok egymásba is ágyazódhatnak:



Átfedő csoportok

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

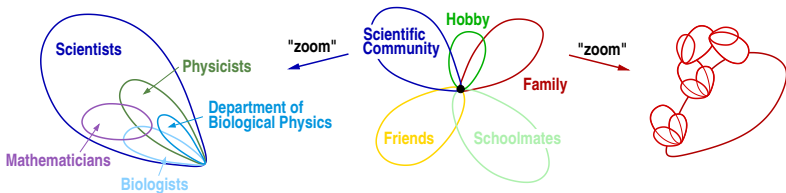
Modularitás

k -klikk perkoláció

A csoportok átfedhetnek egymással:

- Mindenki egyszerre tagja a családjának és a baráti körének,
- Egyes fehérvérjének több funkciója is van, így több csoportban is szerepelhetnek

A csoportok egymásba is ágyazódhatnak:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az átfedéseket természetes módon engedi meg a k -klikk perkoláción alapuló csoport definíció.

Definíciók

- k -klikk: egy teljesen összekötött, k csúcsból álló részgráf.
- k -klikk szomszédság: két k -klikk szomszédos ha $k - 1$ csúcsuk, közös, (vagyis csak egy csúcsban térnek el).
- k -klikk csoport: olyan k -klikkek maximális uniója, melyben bármelyik k -klikkből eljuthatunk k -klikk szomszédságok sorozatán keresztül bármelyik másik k -klikkbe.



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Az átfedéseket természetes módon engedi meg a k -klikk perkoláción alapuló csoport definíció.

Definíciók

- **k -klikk**: egy teljesen összekötött, k csúcsból álló részgráf.
- **k -klikk szomszédság**: két k -klikk szomszédsos ha $k - 1$ csúcsuk, közös, (vagyis csak egy csúcsban térnek el).
- **k -klikk csoport**: olyan k -klikkek maximális uniója, melyben bármelyik k -klikkből eljuthatunk k -klikk szomszédságok sorozatán keresztül bármelyik másik k -klikkbe.



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

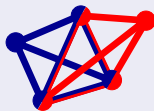
Modularitás

k -klikk perkoláció

Az átfedéseket természetes módon engedi meg a k -klikk perkoláción alapuló csoport definíció.

Definíciók

- **k -klikk**: egy teljesen összekötött, k csúcsból álló részgráf.
- **k -klikk szomszédság**: két k -klikk szomszédos ha $k - 1$ csúcsuk, közös, (vagyis csak egy csúcsban térnek el).
- **k -klikk csoport**: olyan k -klikkek maximális uniója, melyben bármelyik k -klikkből eljuthatunk k -klikk szomszédságok sorozatán keresztül bármelyik másik k -klikkbe.



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-

algoritmus

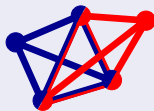
Modularitás

k -klikk perkoláció

Az átfedéseket természetes módon engedi meg a k -klikk perkoláción alapuló csoport definíció.

Definíciók

- **k -klikk**: egy teljesen összekötött, k csúcsból álló részgráf.
- **k -klikk szomszédság**: két k -klikk szomszédos ha $k - 1$ csúcsuk, közös, (vagyis csak egy csúcsban térnek el).
- **k -klikk csoport**: olyan k -klikkek maximális uniója, melyben bármelyik k -klikkből eljuthatunk k -klikk szomszédságok sorozatán keresztül bármelyik másik k -klikkbe.



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

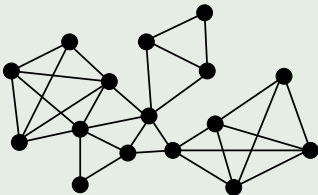
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

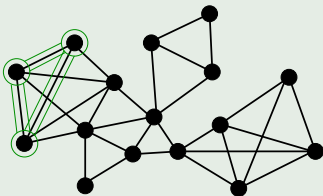
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

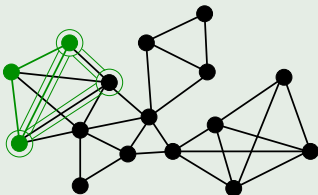
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

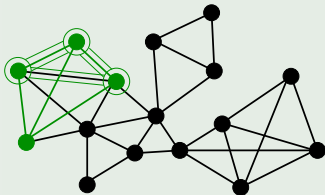
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

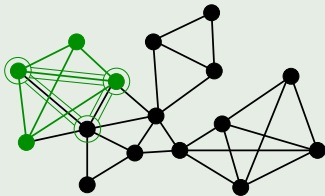
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

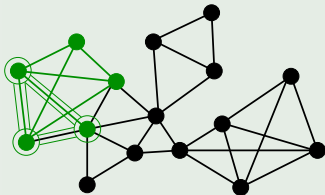
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

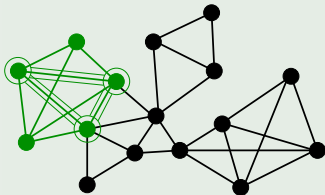
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

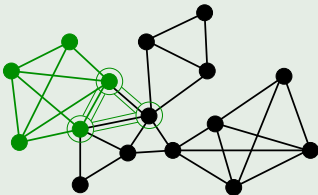
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

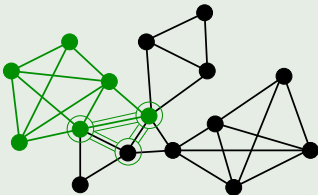
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

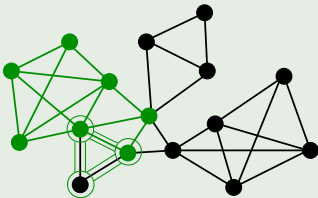
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

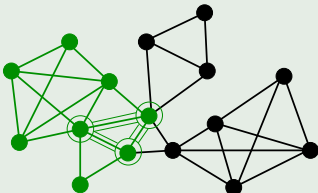
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

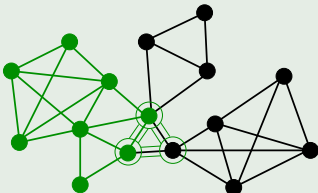
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

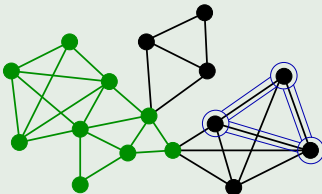
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

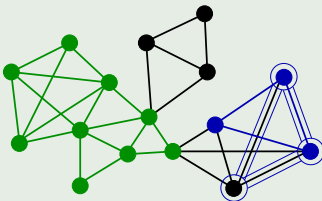
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

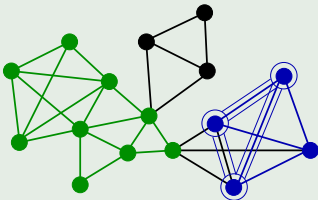
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

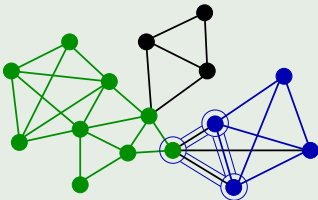
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

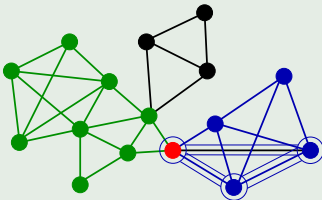
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

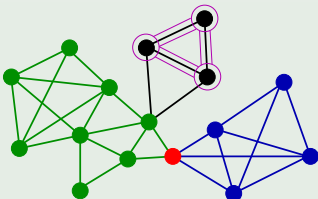
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klikk perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

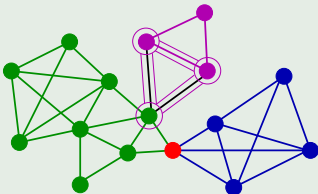
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

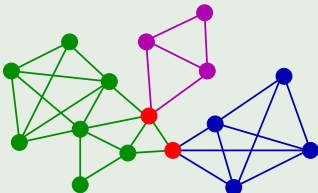
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



A k -klick perkolációs módszer (CPM)

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

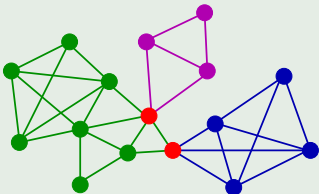
Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

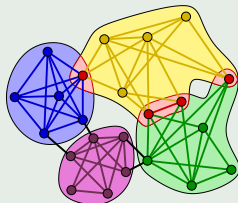
Modularitás

k -klick perkoláció

Szemléltetés:



ugyanaz $k = 4$ -re:



Egy adott csúcs csoportjai

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózat

SIR modell

Csoportkeresés

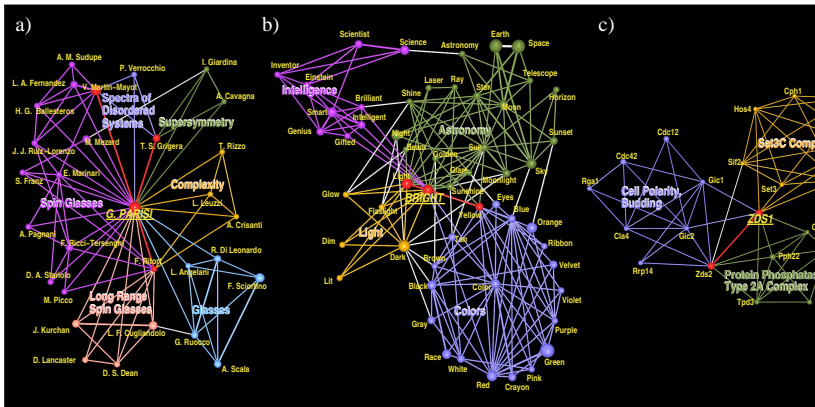
Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció



Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Mi a helyzet a teljes hálózat csoportszerkezetével?

- Magas k és w^* élsúlykűszöb: kicsi, szeparált csoportok.
- Alacsony k és w^* élsúlykűszöb: megjelenhet egy óriás csoport, magábaolvastva a kis csoportok többségét.

Optimális k -klick méret és w^*

Ahol a csoportszerkezet a lehető legtöbb információt tartalmazza: éppen az óriás csoport megjelenésével járó kritikus pont felett.

k -klick perkolációs átalakulás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Mi a helyzet a teljes hálózat csoportszerkezetével?

- Magas k és w^* élsúlyküszöb: kicsi, szeparált csoportok.
- Alacsony k és w^* élsúlyküszöb: megjelenhet egy óriás csoport, magábaolvasztva a kis csoportok többségét.

Optimális k -klick méret és w^*

Ahol a csoportszerkezet a lehető legtöbb információt tartalmazza: éppen az óriás csoport megjelenésével járó kritikus pont felett.

k -klick perkolációs átalakulás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Mi a helyzet a teljes hálózat csoportszerkezetével?

- Magas k és w^* élsúlyküszöb: kicsi, szeparált csoportok.
- Alacsony k és w^* élsúlyküszöb: megjelenhet egy óriás csoport, magábaolvasztva a kis csoportok többségét.

Optimális k -klick méret és w^*

Ahol a csoportszerkezet a lehető legtöbb információt tartalmazza: éppen az óriás csoport megjelenésével járó kritikus pont felett.

k -klick perkolációs átalakulás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Mi a helyzet a teljes hálózat csoportszerkezetével?

- Magas k és w^* élsúlyküszöb: kicsi, szeparált csoportok.
- Alacsony k és w^* élsúlyküszöb: megjelenhet egy óriás csoport, magábaolvasztva a kis csoportok többségét.

Optimális k -klick méret és w^*

Ahol a csoportszerkezet a lehető legtöbb információt tartalmazza: éppen az óriás csoport megjelenésével járó kritikus pont felett.

k -klick perkolációs átalakulás

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus klaszterezés

A Girvan–Newman-algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

Mi a helyzet a teljes hálózat csoportszerkezetével?

- Magas k és w^* élsúlyküszöb: kicsi, szeparált csoportok.
- Alacsony k és w^* élsúlyküszöb: megjelenhet egy óriás csoport, magábaolvasztva a kis csoportok többségét.

Optimális k -klick méret és w^*

Ahol a csoportszerkezet a lehető legtöbb információt tartalmazza: éppen az óriás csoport megjelenésével járó kritikus pont felett.

A CPM további részletei

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén
hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

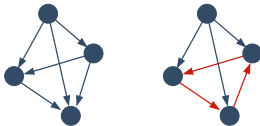
Hierarchikus
klaszterezés

A Girvan–Newman-
algoritmus

Modularitás

k -klikk perkoláció

- Irányított csoportkereső:
Az élek irányával szemben szabunk meg bizonyos kritériumokat a k -klikkeken belül.



G. Palla, I. J. Farkas, P. Pollner, I. Derényi and T. Vicsek, *New Journal of Physics* **9**, 186 (2007)

- Súlyozott csoportkereső:
Az egyes k -klikkeken belül az élsúlyok mértani közepének kell egy bizonyos küszöböt elérnie.

I. J. Farkas, D. Ábel, G. Palla and T. Vicsek, *New Journal of Physics* **9**, 180 (2007)

CFinder

Hálózatok III.

Robusztusság

Inverz perkoláció

Kritikus f

Extrém robusztusság

Célzott támadás

Terjedés

Terjedési modellek

SIS modell

SIS inhomogén

hálózaton

SIR modell

Csoportkeresés

Példák

Hierarchikus

klaszterezés

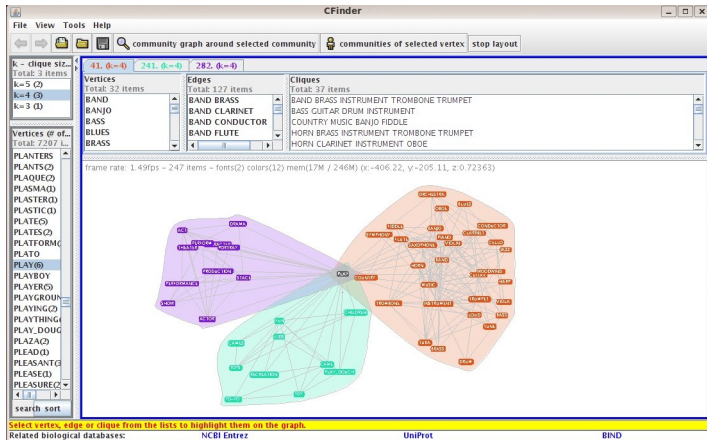
A Girvan–Newman-

algoritmus

Modularitás

k -klick perkoláció

A CPM-en alapuló hálózati csoportkereső és vizualizációs programcsomag: <http://www.cfinder.org>



Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Csoportos mozgás 1, 2 és 3 dimenzióban fázisátalakulás, skálatulajdonságok, emberek csoportos mozgása

Modellezés: Alapfogalmak

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

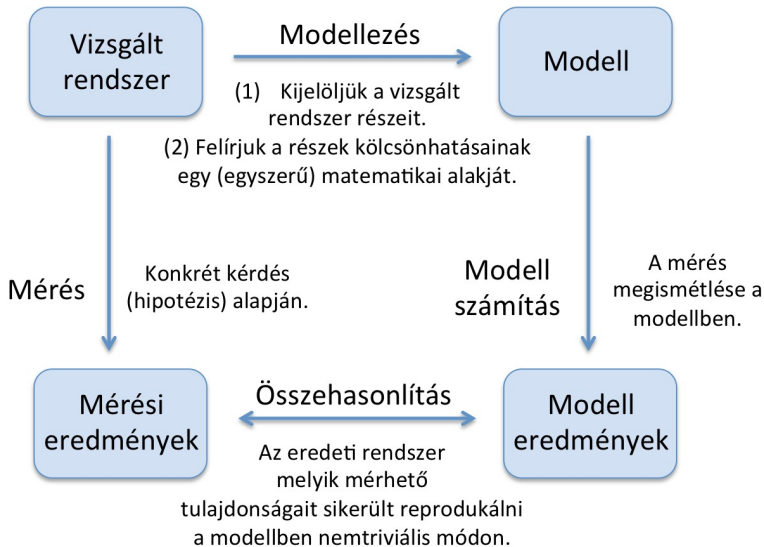
Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Eberek csoportos mozgása



Megfigyelések

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

- Ferromágneses állapot
- Mermin-Wagner tétel
- Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

- Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje
- Navier-Stokes egyenlet
- Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A csoportos mozgás az élővilágban és a technológiai rendszerekben egyaránt gyakori.

Megfigyelések

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A csoportos mozgás az élővilágban és a technológiai rendszerekben egyaránt gyakori.

- Nagy számú hasonló egyed
- Sok rendszerben néhány hasonló típusú csoportos mozgás
- Általában helyi kölcsönhatásokból rendszerméretű rendeződés

Megfigyelések

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot
Mermin-Wagner tétel
Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje
Navier-Stokes egyenlet
Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A csoportos mozgás az élővilágban és a technológiai rendszerekben egyaránt gyakori.

- Nagy számú hasonló egyed
- Sok rendszerben néhány hasonló típusú csoportos mozgás
- Általában helyi kölcsönhatásokból rendszerméretű rendeződés

Példák videókkal:

Megfigyelések

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot
Mermin-Wagner tétel
Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje
Navier-Stokes egyenlet
Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A csoportos mozgás az élővilágban és a technológiai rendszerekben egyaránt gyakori.

- Nagy számú hasonló egyed
- Sok rendszerben néhány hasonló típusú csoportos mozgás
- Általában helyi kölcsönhatásokból rendszerméretű rendeződés

Példák videókkal:

- Baktériumok (Rotating colonies)
- Halak, <https://youtu.be/D6HdolsLMFg> (Tuna Tornado)
- Denevérek, <https://goo.gl/qgC7QI> (1 million bats, 4m15s)
- Madarak, <https://youtu.be/V-mCuFYfJdl> (Falcon and Starlings)
- Emberek, <https://youtu.be/KGukAoiGhZU> (Pilgrims, rotation)
- Robotok 2d, https://youtu.be/cHbgrnv_8Nk (Kilobots, phototaxis)
- Drónok 3d, <https://goo.gl/cpKusZ> (ERC Collmot, formations, 6m15s)

A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Minden résztvevőt („részecskét”) jellemez egy vektor:
a saját mozgásának az iránya

- mágneses analógia alapján az i . részecske irányát jelölje \vec{J}_i
- az összes részecske \vec{J}_i vektorai együtt: $\{J\}$

A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Minden résztvevőt („részecskét”) jellemez egy vektor:
a saját mozgásának az iránya

- mágneses analógia alapján az i . részecske irányát jelölje \vec{J}_i
- az összes részecske \vec{J}_i vektorai együtt: $\{J\}$

Szintén a mágneses analógia alapján:

- a rendezett mozgás modellje a ferromágneses állapot
- a Hamilton függvény: $\mathcal{H} = \sum_{\langle i,k \rangle} J_i J_k$
- kanonikus sokaságban az állapot valószínűsége: $\mathcal{P}(\{J\}) = e^{-\beta \mathcal{H}} / Z$

A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Minden résztvevőt („részecskét”) jellemez egy vektor: a saját mozgásának az iránya

- mágneses analógia alapján az i . részecske irányát jelölje \vec{J}_i
- az összes részecske \vec{J}_i vektorai együtt: $\{J\}$

Szintén a mágneses analógia alapján:

- a rendezett mozgás modellje a ferromágneses állapot
- a Hamilton függvény: $\mathcal{H} = \sum_{\langle i,k \rangle} J_i J_k$
- kanonikus sokaságban az állapot valószínűsége: $\mathcal{P}(\{J\}) = e^{-\beta \mathcal{H}} / Z$

A β mutatja, hogy egy részecske (a valóságban pl: madár vagy bölény) mozgásának irányát mennyire befolyásolja az, hogy a többiek éppen merre mozognak.

A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

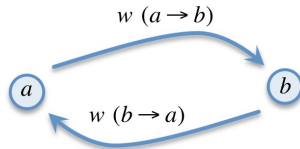
Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A részletes egyensúly:

Tetszőleges a és b állapot között teljesül

$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$



A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

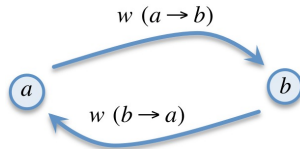
A részletes egyensúly:

Tetszőleges a és b állapot között teljesül

$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$

A modellekben az átmeneti
valószínűségek könnyebben
mérhetőek, ezért írjuk át a
feltételt így:

$$\frac{w(a \rightarrow b)}{w(b \rightarrow a)} = \frac{e^{-\beta(\mathcal{H}_a - \mathcal{H}_b)}}{Z}$$



A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A részletes egyensúly:

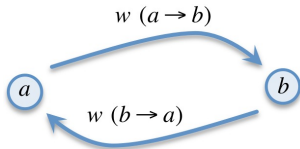
Tetszőleges a és b állapot között teljesül

$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$

A modellekben az átmeneti valószínűségek könnyebben mérhetőek, ezért írjuk át a feltételt így:

$$\frac{w(a \rightarrow b)}{w(b \rightarrow a)} = \frac{e^{-\beta(\mathcal{H}_a - \mathcal{H}_b)}}{Z}$$

Ha ez teljesül, akkor van egy olyan stacionárius $\mathcal{P}(\{J\})$ eloszlás, amelyre teljesül a $\mathcal{P}(\{J\}) = e^{-\beta \mathcal{H}} / Z$.



A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A részletes egyensúly:

Tetszőleges a és b állapot között teljesül

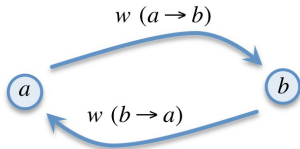
$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$

A modellekben az átmeneti valószínűségek könnyebben mérhetőek, ezért írjuk át a feltételt így:

$$\frac{w(a \rightarrow b)}{w(b \rightarrow a)} = \frac{e^{-\beta(\mathcal{H}_a - \mathcal{H}_b)}}{Z}$$

Ha ez teljesül, akkor van egy olyan stacionárius $\mathcal{P}(\{J\})$ eloszlás, amelyre teljesül a $\mathcal{P}(\{J\}) = e^{-\beta \mathcal{H}} / Z$.

A $\mathcal{P}(\{J\})$ néha analitikusan számítható, gyakran csak numerikusan.



A csoportos mozgás

mint ferromágneses állapot

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A részletes egyensúly:

Tetszőleges a és b állapot között teljesül

$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$

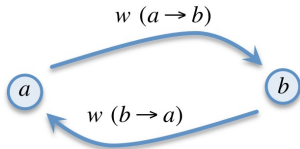
A modellekben az átmeneti valószínűségek könnyebben mérhetőek, ezért írjuk át a feltételt így:

$$\frac{w(a \rightarrow b)}{w(b \rightarrow a)} = \frac{e^{-\beta(\mathcal{H}_a - \mathcal{H}_b)}}{Z}$$

Ha ez teljesül, akkor van egy olyan stacionárius $\mathcal{P}(\{J\})$ eloszlás, amelyre teljesül a $\mathcal{P}(\{J\}) = e^{-\beta \mathcal{H}} / Z$.

A $\mathcal{P}(\{J\})$ néha analitikusan számítható, gyakran csak numerikusan.

Megjegyzés: ha a spinek (részecskék) egy rács pontjaiban vannak, akkor ez a klasszikus XY ferromágnes modell, ami az n -vektor modell $n = 2$ dimenziós esete.



Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

(1) Alapállapot, $T=0$
esetén a szabadenergia
 $F = E - T S = 0$



Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

(1) Alapállapot, $T=0$
esetén a szabadenergia
 $F = E - T S = 0$



Véges hőmérséklet
esetén egy **jellemző állapot (2):**



Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

(1) Alapállapot, $T=0$
esetén a szabadenergia
 $F = E - T S = 0$



Véges hőmérséklet
esetén egy **jellemző állapot (2):**



Ha a rendszer az alapállapotban van, és a hőmérsékletet kicsivel nulla fölé visszük, akkor a szabadenergia csökkenhet az entrópia növekedésével.

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

(1) Alapállapot, $T=0$
esetén a szabadenergia
 $F = E - T S = 0$



Véges hőmérséklet
esetén egy **jellemző állapot (2):**



Ha a rendszer az alapállapotban van, és a hőmérsékletet kicsivel nulla fölé visszük, akkor a szabadenergia csökkenhet az entrópia növekedésével.

Tehát mélyebb szabadenergiájú lesz egy olyan állapot, amiben egy kicsit elfordul néhány spin.

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Lokális kölcsönhatások és véges hőmérséklet ($T > 0$, azaz $\beta < \infty$) esetén 2 dimenzióban rögzített helyen lévő spinek nem tudnak hosszútávú (makroszkopikus) rendezett állapotot létrehozni.

(1) Alapállapot, $T=0$
esetén a szabadenergia
 $F = E - T S = 0$



Véges hőmérséklet
esetén egy **jellemző állapot (2):**



Ha a rendszer az alapállapotban van, és a hőmérsékletet kicsivel nulla fölé visszük, akkor a szabadenergia csökkenhet az entrópia növekedésével.

Tehát mélyebb szabadenergiájú lesz egy olyan állapot, amiben egy kicsit elfordul néhány spin.

A szomszédos láncban lévő spinek is elfordulnak.

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

(2) Véges hőmérsékleten jellemző állapotok

- spin elfordulása $\vartheta \sim \frac{1}{\ell}$ és a skalárszorzat $\sim \frac{1}{\ell^2}$
- kölcsönható spin párok száma ℓ^2

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

(2) Véges hőmérsékleten jellemző állapotok

- spin elfordulása $\vartheta \sim \frac{1}{\ell}$ és a skalárszorzat $\sim \frac{1}{\ell^2}$
- kölcsönható spin párok száma ℓ^2

Tehát az energia $E \sim \frac{1}{\ell^2} \ell^2 = \text{const.} > 0$

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

(2) Véges hőmérsékleten jellemző állapotok

- spin elfordulása $\vartheta \sim \frac{1}{\ell}$ és a skalárszorzat $\sim \frac{1}{\ell^2}$
- kölcsönható spin párok száma ℓ^2

Tehát az energia $E \sim \frac{1}{\ell^2} \ell^2 = \text{const.} > 0$

- az ilyen mikroállapotok száma $W \geq \ell$, mert a hullám ℓ különböző helyről indítható és más ilyen energiájú állapot is lehet

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

(2) Véges hőmérsékleten jellemző állapotok

- spin elfordulása $\vartheta \sim \frac{1}{\ell}$ és a skalárszorzat $\sim \frac{1}{\ell^2}$
- kölcsönható spin párok száma ℓ^2

Tehát az energia $E \sim \frac{1}{\ell^2} \ell^2 = \text{const.} > 0$

- az ilyen mikroállapotok száma $W \geq \ell$, mert a hullám ℓ különböző helyről indítható és más ilyen energiájú állapot is lehet
- emiatt $S = k \ln W \geq k \ln \ell$

Mermin-Wagner tétel

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A jelenség megértéséhez számoljuk meg a mikroállapotokat, és adjunk becslést a szabadenergia értékére.

(1) Alapállapot

$E = 0, S = 0$: csak egy ilyen mikroállapot van, ekkor $S = 0$

(2) Véges hőmérsékleten jellemző állapotok

- spin elfordulása $\vartheta \sim \frac{1}{\ell}$ és a skalárszorzat $\sim \frac{1}{\ell^2}$
- kölcsönható spin párok száma ℓ^2

Tehát az energia $E \sim \frac{1}{\ell^2} \ell^2 = \text{const.} > 0$

- az ilyen mikroállapotok száma $W \geq \ell$, mert a hullám ℓ különböző helyről indítható és más ilyen energiájú állapot is lehet
- emiatt $S = k \ln W \geq k \ln \ell$

Tehát a szabadenergia: $F = \text{const.} - k \ln \ell$
nagy ℓ esetén negatív.

Scalar Noise Model

Bevezetés és a modell áttekintése

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A ferromágneses modell nem veszi figyelembe, hogy a részecskék (a résztvevő élőlények) mozognak.

Scalar Noise Model

Bevezetés és a modell áttekintése

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A ferromágneses modell nem veszi figyelembe, hogy a részecskék (a résztvevő élőlények) mozognak.

Ha egy kis csoport rendeződik, akkor a rendezettségének az irányát el tudja vinni a mozgásának irányában található sávban jóval messzebbre, mint a kölcsönhatási távolság.

Scalar Noise Model

Bevezetés és a modell áttekintése

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses

állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A ferromágneses modell nem veszi figyelembe, hogy a részecskék (a résztvevő élőlények) mozognak.

Ha egy kis csoport rendeződik, akkor a rendezettségének az irányát el tudja vinni a mozgásának irányában található sávban jóval messzebbre, mint a kölcsönhatási távolság.

A ferromágneses modell módosítása (Vicsek et al, Phys Rev Lett, 1995)

- Tegyük azonosná a részecske kölcsönhatási tulajdonságát mutató „spint” (pszeudovektor) és a sebességét (valódi vektor).
- Legyen a mozgás térben folytonos és időben diszkrét ($t = 1, 2, 3, \dots$)
- A frissítés során a részecske új iránya legyen a közelében lévők irányának vektori átlagát.
- A kapott új irányhoz adjunk hozzá irány szerinti zajt.

Scalar Noise Model

Bevezetés és a modell áttekintése

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot
Mermin-Wagner tétel
Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje
Navier-Stokes egyenlet
Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

A ferromágneses modell nem veszi figyelembe, hogy a részecskék (a résztvevő élőlények) mozognak.

Ha egy kis csoport rendeződik, akkor a rendezettségének az irányát el tudja vinni a mozgásának irányában található sávban jóval messzebbre, mint a kölcsönhatási távolság.

A ferromágneses modell módosítása (Vicsek et al, Phys Rev Lett, 1995)

- Tegyük azonosá a részecske kölcsönhatási tulajdonságát mutató „spint” (pseudovektor) és a sebességét (valódi vektor).
- Legyen a mozgás térben folytonos és időben diszkrét ($t = 1, 2, 3, \dots$)
- A frissítés során a részecske új iránya legyen a közelében lévők irányának vektori átlagát.
- A kapott új irányhoz adjunk hozzá irány szerinti zajt.

Vizsgáljuk meg, hogy van-e hosszú távú (rendszerméretű) rendeződés a részecske sűrűség és a zaj amplitúdó változtatása esetén.

Scalar Noise Model

Jelölések és a Modell definíciója

Kollektív
mozgás

Az irány típusú zaj miatt a Vicsek et al (PRL, 1995) modell gyakori neve „Scalar Noise Model” (SNM).

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Scalar Noise Model

Jelölések és a Modell definíciója

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Az irány típusú zaj miatt a Vicsek et al (PRL, 1995) modell gyakori neve „Scalar Noise Model” (SNM).

Jelölések:

- $\vartheta_i(t)$: az i . részecske iránya a t időpontban
- $\vec{x}_i(t), \vec{v}_i(t)$: hely és sebesség, $|\vec{v}_i(t)| = \text{const.} = v_0$
- $\xi_i(t)$: szöghöz hozzáadott zaj, átlaga 0
- az i . részecskéhez R távolságnál közelebb lévő más részecskék irányainak vektori átlaga: $\langle \vartheta(t) \rangle_i = \arctan \frac{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \sin(\vartheta_j)}{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \cos(\vartheta_j)}$
(a többi részecske vektoraiból kapott összeg iránya)

Scalar Noise Model

Jelölések és a Modell definíciója

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Az irány típusú zaj miatt a Vicsek et al (PRL, 1995) modell gyakori neve „Scalar Noise Model” (SNM).

Jelölések:

- $\vartheta_i(t)$: az i . részecske iránya a t időpontban
- $\vec{x}_i(t)$, $\vec{v}_i(t)$: hely és sebesség, $|\vec{v}_i(t)| = \text{const.} = v_0$
- $\xi_i(t)$: szöghöz hozzáadott zaj, átlaga 0
- az i . részecskéhez R távolságnál közelebb lévő más részecskék irányainak vektori átlaga: $\langle \vartheta(t) \rangle_i = \arctan \frac{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \sin(\vartheta_j)}{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \cos(\vartheta_j)}$
(a többi részecske vektoraiból kapott összeg iránya)

Időlépés (frissítés) a modellben:

$$\vartheta_i(t+1) = \langle \vartheta(t) \rangle_i + \xi_i(t)$$

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + v_0 (\cos \vartheta_i(t), \sin \vartheta_i(t))$$

Scalar Noise Model

Jelölések és a Modell definíciója

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Az irány típusú zaj miatt a Vicsek et al (PRL, 1995) modell gyakori neve „Scalar Noise Model” (SNM).

Jelölések:

- $\vartheta_i(t)$: az i . részecske iránya a t időpontban
- $\bar{x}_i(t), \bar{v}_i(t)$: hely és sebesség, $|\bar{v}_i(t)| = \text{const.} = v_0$
- $\xi_i(t)$: szöghöz hozzáadott zaj, átlaga 0
- az i . részecskéhez R távolságnál közelebb lévő más részecskék irányainak vektori átlaga: $\langle \vartheta(t) \rangle_i = \arctan \frac{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \sin(\vartheta_j)}{\sum_{j \neq i, d(i,j) < R} \cos(\vartheta_j)}$
(a többi részecske vektoraiból kapott összeg iránya)

Időlépés (frissítés) a modellben:

$$\vartheta_i(t+1) = \langle \vartheta(t) \rangle_i + \xi_i(t)$$

$$\bar{x}_i(t+1) = \bar{x}_i(t) + v_0 (\cos \vartheta_i(t), \sin \vartheta_i(t))$$

Az explicit követési szabály felel meg annak, hogy a mágneses rendszerben a részecskék minimalizálni kívánják a kölcsönhatási

Jelölések és módszerek:

- a kölcsönhatási sugár legyen $R = 1$
- a szimulációt $L \times L$ területen végezzük (L egész szám)
- határfeltétel:
 - visszaverő fal esetén a fal-részecske kölcsönhatás erősen befolyásolja a jelenséget
 - szerencsésebb (kevesbé befolyásol) a periodikus határfeltétel
- $r_x = r_y = 1$ méretű mezőket (rácst) használva csak a szomszédos mezők között lehet kölcsönhatás, !! határoknál külön számolás
- időlépés nagysága: $\Delta t = 1$
- a rögzített v_0 sebességre: $v_0 \Delta t \ll L$, például $v_0 \approx 0.3$
 - ha v_0 kicsi, akkor több lépésen át fenmaradnak a szomszédosági viszonyok
 - de ha v_0 nagyon kicsi, akkor nagyon kicsi az eltérés a mágneses modelltől
- a zaj szórása (jellemző nagysága): σ

Scalar Noise Model

Szimulációk

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Jelölések és módszerek:

- a kölcsönhatási sugár legyen $R = 1$
- a szimulációt $L \times L$ területen végezzük (L egész szám)
- határfeltétel:
 - visszaverő fal esetén a fal-részecske kölcsönhatás erősen befolyásolja a jelenséget
 - szerencsésebb (kevesbé befolyásol) a periodikus határfeltétel
- $r_x = r_y = 1$ méretű mezőket (rácst) használva csak a szomszédos mezők között lehet kölcsönhatás, !! határoknál külön számolás
- időlépés nagysága: $\Delta t = 1$
- a rögzített v_0 sebességre: $v_0 \Delta t \ll L$, például $v_0 \approx 0.3$
 - ha v_0 kicsi, akkor több lépésen át fenmaradnak a szomszédos viszonyok
 - de ha v_0 nagyon kicsi, akkor nagyon kicsi az eltérés a mágneses modelltől
- a zaj szórása (jellemző nagysága): σ

→ Két fő paraméter: σ és $\rho = N/L^2$

Scalar Noise Model

Szimulációk - Kölcsönhatások nyilvántartása

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

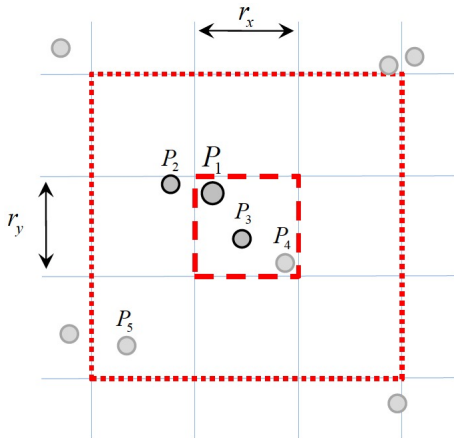
Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása



$$d(P_1, P_2) < R$$

$$d(P_1, P_3) < R$$

$$d(P_1, P_4) > R$$

$$d(P_1, P_5) > R$$

Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 2 dimenzióban

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Rendparaméter

A sebességvektorok vektori összegének hossza a maximálisan lehetséges érték mekkora része:

$$0 \leq \Phi = \frac{|\sum \vec{v}_i|}{Nv_0} \leq 1$$

Eredmények 2 dimenzióban:

Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 2 dimenzióban

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

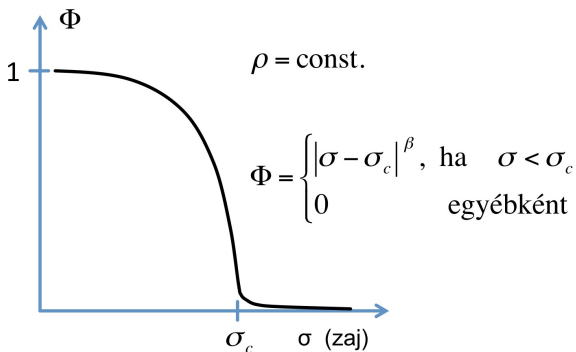
Emberek
csoportos
mozgása

Rendparaméter

A sebességvektorok vektori összegének hossza a maximálisan lehetséges érték mekkora része:

$$0 \leq \Phi = \frac{|\sum \vec{v}_i|}{Nv_0} \leq 1$$

Eredmények 2 dimenzióban:



Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 2 dimenzióban

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

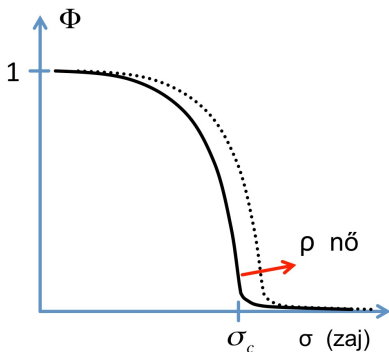
Emberek
csoportos
mozgása

Rendparaméter

A sebességvektorok vektori összegének hossza a maximálisan lehetséges érték mekkora része:

$$0 \leq \Phi = \frac{|\sum \vec{v}_i|}{Nv_0} \leq 1$$

Eredmények 2 dimenzióban:



Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 3 dimenzióban

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 3 dimenzióban

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

3d-ben a sebesség iránya (ϑ) helyett a sebességvektort frissítjük:

$$\vec{v}_i(t+1) = v_0 \mathcal{N} \left(\mathcal{N} \langle \vec{v}(t) \rangle_i + \vec{\xi}_i(t) \right),$$

ahol \mathcal{N} a normálási operátor: $\mathcal{N} \vec{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$.

Scalar Noise Model

Szimulációk - Eredmények 3 dimenzióban

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

3d-ben a sebesség iránya (ϑ) helyett a sebességvektort frissítjük:

$$\vec{v}_i(t+1) = v_0 \mathcal{N} \left(\mathcal{N} \langle \vec{v}(t) \rangle_i + \vec{\xi}_i(t) \right),$$

ahol \mathcal{N} a normálási operátor: $\mathcal{N} \vec{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$.

Szimulációs eredmények (más néven: numerikus eredmények)

- 3d-ben és 1d-ben is van rendeződés.
- A Scalar Noise Model-ben az átalakulás 1d-ben, 2d-ben és 3d-ben is folytonos. (A 2d esettel kapcsolatos hosszú vita (2004-2008) után a legutolsó eredmények szerint a nem folytonos átalakulást mutató eredmény alapja számítási hiba.)

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A Scalar Noise Model korlátja, hogy a modellben

- ρ nagyon nagy lehet
- az idő diszkrét

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A Scalar Noise Model korlátja, hogy a modellben

- ρ nagyon nagy lehet
- az idő diszkrét

A csoportos mozgás hidrodinamikai modelljének felírása előtt tekintsük át a Navier-Stokes egyenletet.

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív
mozgás

Folyadék mozgása, van belső súrlódás és külső tér.

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

**Navier-Stokes
egyenlet**

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív
mozgás

Folyadék mozgása, van belső súrlódás és külső tér.

Jelölések:

- $\rho(\vec{r}, t)$: sűrűség
- $\vec{v}(\vec{r}, t)$: sebességvektor
- **I**: egységmátrix
- izotrop anyagban a $\sigma_{i,j}(\vec{r}, t)$ feszültségtenzor:

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} -p & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & -p & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & -p \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

- $p(\vec{r}, t)$: nyomás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív
mozgás

Folyadék mozgása, van belső súrlódás és külső tér.

Jelölések:

- $\rho(\vec{r}, t)$: sűrűség
- $\vec{v}(\vec{r}, t)$: sebességvektor
- \mathbf{I} : egységmátrix
- izotrop anyagban a $\sigma_{i,j}(\vec{r}, t)$ feszültségtenzor:

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} -p & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & -p & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & -p \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

- $p(\vec{r}, t)$: nyomás

Anyagmegmaradási egyenlet: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív
mozgás

Folyadék mozgása, van belső súrlódás és külső tér.

Jelölések:

- $\rho(\vec{r}, t)$: sűrűség
- $\vec{v}(\vec{r}, t)$: sebességvektor
- \mathbf{I} : egységmátrix
- izotrop anyagban a $\sigma_{i,j}(\vec{r}, t)$ feszültségtenzor:

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} -p & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & -p & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & -p \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

- $p(\vec{r}, t)$: nyomás

Anyagmegmaradási egyenlet: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$

Navier-Stokes egyenlet:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \otimes \vec{\nabla}(\rho \vec{v})}_{\text{aramló részecskevel együtt mozgó derivált}} = \underbrace{\vec{\nabla}(-p\mathbf{I})}_{\text{nyomás járuléka}} + \underbrace{\vec{\nabla} \mathbf{T}}_{\text{nyíró erők}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{gravitáció}}$$

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív
mozgás

Összenyomhatatlan ($\rho = \text{const.}$) és **súlytalan** ($g = 0$) folyadék esetén:

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

**Navier-Stokes
egyenlet**

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Összenyomhatatlan ($\rho = \text{const.}$) és **súlytalan** ($g = 0$) folyadék esetén:

az anyagmegmaradási egyenlet: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Navier-Stokes egyenlet

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Összenyomhatatlan ($\rho = \text{const.}$) és **súlytalan** ($g = 0$) folyadék esetén:

az anyagmegmaradási egyenlet: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

a Navier-Stokes egyenlet:
$$\rho \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \otimes \vec{\nabla} \right)}_{\text{együtt mozgó deriválás}} \vec{v} = \underbrace{\vec{\nabla}(-p)}_{\text{nyomás járuléka}} + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{viszkózitása}}$$

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

A modell felírása a Navier-Stokes egyenletből kiindulva

Kollektív mozgás

(1) A kontinuitási egyenlet marad. (2) Legyen a sűrűség változása kicsi: a mozgásegyenletben a sűrűség deriváltjai elhanyagolhatóak.

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

A modell felírása a Navier-Stokes egyenletből kiindulva

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

(1) A kontinuitási egyenlet marad. (2) Legyen a sűrűség változása kicsi: a mozgásegyenletben a sűrűség deriváltjai elhanyagolhatóak.

Írjuk be a Navier-Stokes egyenletbe azt, hogy a folyadék egy pontja

- a **sebességének a nagyságát** egy rögzített v_0 értékhez kívánja igazítani
- a **sebességének az irányát** explicit módon a körülötte lévő kis ε sugarú környezet (vektori) átlag sebességéhez igazítja τ karakterisztikus idővel

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

A modell felírása a Navier-Stokes egyenletből kiindulva

Kollektív
mozgás

(1) A kontinuitási egyenlet marad. (2) Legyen a sűrűség változása kicsi: a mozgásegyenletben a sűrűség deriváltjai elhanyagolhatóak.

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Írjuk be a Navier-Stokes egyenletbe azt, hogy a folyadék egy pontja

- a **sebességének a nagyságát** egy rögzített v_0 értékhez kívánja igazítani
- a **sebességének az irányát** explicit módon a körülötte lévő kis ε sugarú környezet (vektori) átlag sebességéhez igazítja τ karakterisztikus idővel

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \\ \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \otimes \vec{\nabla}) \vec{v} &= \underbrace{\vec{F}(\vec{v}, v_0)}_{\text{hajtoero}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} (\underbrace{\langle \vec{v} \rangle_\varepsilon}_{\text{helyi atlag}} - \vec{v})}_{\text{rendezo tag}} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\end{aligned}$$

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

A modell felírása a Navier-Stokes egyenletből kiindulva

Kollektív
mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

(1) A kontinuitási egyenlet marad. (2) Legyen a sűrűség változása kicsi: a mozgásegyenletben a sűrűség deriváltjai elhanyagolhatóak.

Írjuk be a Navier-Stokes egyenletbe azt, hogy a folyadék egy pontja

- a **sebességének a nagyságát** egy rögzített v_0 értékhez kívánja igazítani
- a **sebességének az irányát** explicit módon a körülötte lévő kis ε sugarú környezet (vektori) átlag sebességéhez igazítja τ karakterisztikus idővel

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \otimes \nabla) \vec{v} &= \underbrace{\vec{F}(\vec{v}, v_0)}_{\text{hajtóerő}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} \left(\underbrace{\langle \vec{v} \rangle_\varepsilon}_{\text{helyi átlag}} - \vec{v} \right)}_{\text{rendező tag}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}\end{aligned}$$

A rendező tagban lévő helyi átlag kifejezhető deriváltakkal.

$$\text{A hajtóerő legyen } \vec{F}(\vec{v}, v_0) = \frac{1}{\tau^*} \left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} v_0 - \vec{v} \right).$$

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Eredmények

Kollektív mozgás

A mozgásegyenletből átalakításokkal:

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Eredmények

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A mozgásegyenletből átalakításokkal:

$$\langle \vec{v} \rangle - \vec{v} = C \left[\nabla^2 \vec{v} + 2 \frac{(\nabla \vec{v})(\nabla \rho)}{\rho} \right]$$

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Eredmények

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses
állapot

Mermin-Wagner tétel
Scalar Noise Model

Hidrodinamikai
modell

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Navier-Stokes
egyenlet

Csoportos mozgás
hidrodinamikai
modellje

Emberek
csoportos
mozgása

A mozgásegyenletből átalakításokkal:

$$\langle \vec{v} \rangle - \vec{v} = C \left[\nabla^2 \vec{v} + 2 \frac{(\nabla \vec{v})(\nabla \rho)}{\rho} \right]$$

Numerikus integrálással kapott irodalmi eredmények:

- **Kis zárt tartományon** belül 1 örvény van. A zárt határfeltétel miatt nem lehet stacionárius megoldás az, hogy mindenhol azonos irányban mozog a folyadék
- **Nagy tartományon:** sok nagy méretű örvény, de lokálisan rendezett. PI baktériumtelepeknél lehet látni ilyen mozgást.

Emberek csoportos mozgása

Kollektív mozgás

Megfigyelések

Mágneses modell

Ferromágneses állapot

Mermin-Wagner tétel

Scalar Noise Model

Hidrodinamikai modell

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Navier-Stokes egyenlet

Csoportos mozgás hidrodinamikai modellje

Emberek csoportos mozgása

Honlap: <http://angel.elte.hu/panic>

Mozgásegyenlet: a Helbing et al (2000) cikk (1)-es egyenlete.

Kölcsönhatások: (2)-es és (3)-as egyenlet.

Főbb eredmények:

- Menekülési „erősség” növelésével csökkenő hatékonyság.
- Terület csökkentésével hatékonyság nő.
- Széles körben használt, **térben és időben folytonos** módszer.

Számítógépes szimulációkat mutató videók a „Simulations” linkre kattintva.