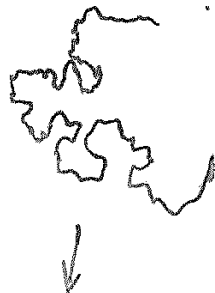


Fraktálnövekedés

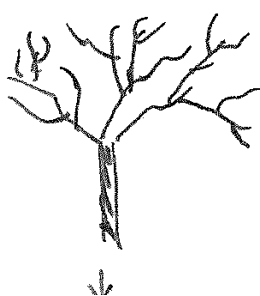
Miért fontos? - ember készítése objektumok ált. nem fraktálok
(megj.: pl. az asztal felülete nanométeres skálán elég bonyolult)

- természetben nagyon gyakori
pl: felhő, Anglia partja, faágak, bizonyos hegyek

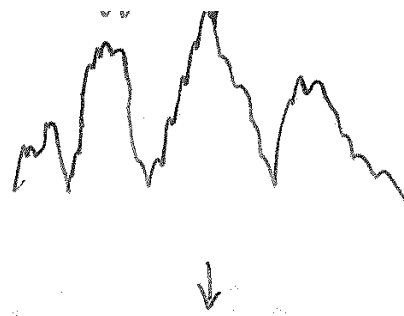
felhő



Felhő, partvonal
izotróp vonal

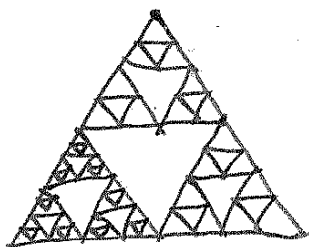


elágazó struktúra(nincs hurok)
fa, villám, gyökér
érhálózat



felületek
hegyorom

mikroszkopikus felbontásban a legtöbb felület ilyen fizikai függvények is



→ csak hurok van benne

Fontos fogalmak: - skálázás

$f(x)$ skálázó fgv., ha $f(x)=b^{-\alpha} f(bx)$
ilyenek a hatványfgv.-ek

- instabilitás
az elágazó szerkezet instabilitás útján jön létre:
instabil felület, kis perturbáció nem kismul, hanem nőni kezd



- kollektív viselkedés
sok hasonló egységből álló rdsz.-ben az egységek viselkedhetnek

→ individuálisan

→ kollektíven

pl: ideális gáz molekulái individuálisan viselkednek
folyadék- pozícióik már nem függetlenek, de még
nem hívjuk kollektív
viselkedésnek,
Brown-mozgás ← véletlenszerűen mozognak
szilárd, rács – kollektív viselkedés eredményeként

fraktálok is ált. sok k.ható egységből épülnek fel, ezek
k.hatása hozza létre a fraktált

sok kristályos anyag szabályos elágazó szerkezetben kristályosodik



v. hópehely

3 fő téma:

- fraktálok (geometria, fraktálgeometria alapjai)
- modellezés

- gyakorlati növekedési jelenségek

Fraktálgeometria

a fraktálok (tipikusan) önhasonlóak (skála-invariánsak)



vizuálisan: az objektum kis részét felnagyítva az
hasonlít az eredetire

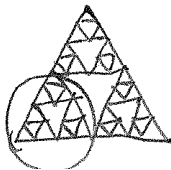
v. máshogy: az objektumot lekicsinyítve
úgy néz ki, mint az eredeti

objektum egy része

a matematikai értelemben vett fraktál absztrakció

pl: $k=1$ lépés

$k=2$



e

zt duplázva uazt. kapom, mint az eredeti

matematikai fraktál: $k \rightarrow \infty$, ∞ pici részletekkel rendelkezik \rightarrow teljesen
önhasonló

részt a legkisebb részek

véges sok k lépés után duplázva a fenti

mint az eredeti

is duplázódnak, nem lesz teljesen uaz.,

fizika: van egy méretskála, amin belül igaz az önhasonlóság

beágyazási dimenzió (d) : az a legkisebb euklideszi, amilyen dimenziójú euklideszi térben

még éppen belefér

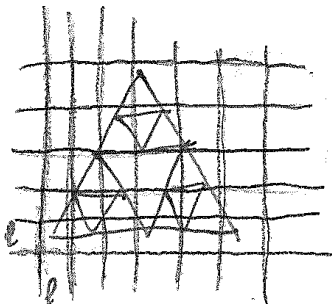
egy fizikai objektumot fraktálnak nevezünk, ha a térfogata /felülete/ hosszát mérve szokásos

módszerekkel az nem konvergál jól (0 v. ∞ -hez tart), a méréshez használt

egységnyi objektumot több nagyságrenden keresztül változtatva

fraktál: pl. Δ -es szerkezet \rightarrow teli Δ -ekből kivágással: területe $\rightarrow 0$
 \rightarrow vonalakkól: vonalak teljes hossza $\rightarrow \infty$

területe 0 , hossza végtelen \rightarrow az objektumot leíró dimenzió 1 és 2 között van



lefedjük d beágyazási dimenziójú hálóval
megszámoljuk, hány dobozban van

része a fraktálnak $\rightarrow N(l)$

vagy kis golyókkal fedem le a fraktált,

ehhez $N(l)$ db. golyó kell

$$V(l) \sim l^d \cdot N(l)$$

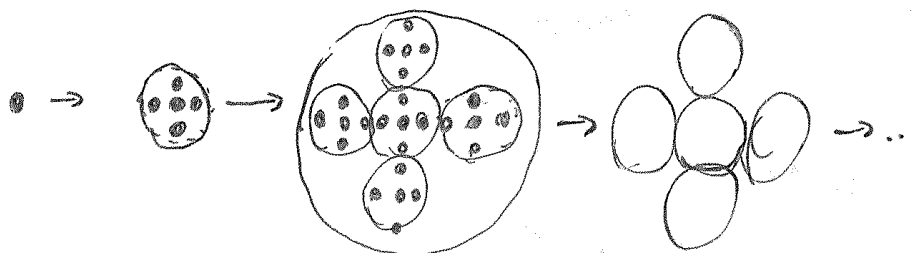
$l \rightarrow 0$, $V(l)$ véges



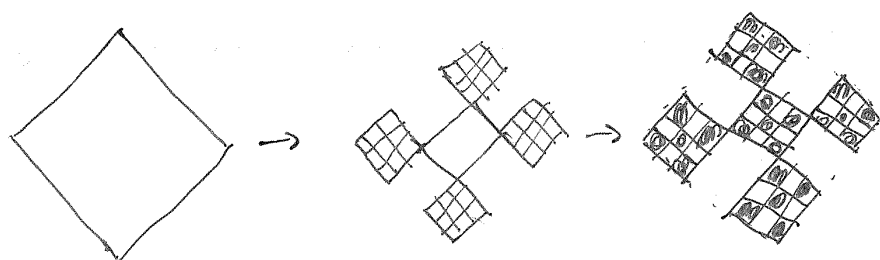
$$N(l) \sim l^{-d}$$

fraktálok konstrukciója: - növekedő
 felosztódó

növekedő:



felosztódó:

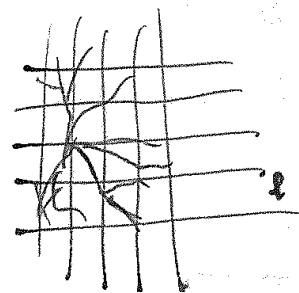


uaz. lesz, mint az előző növekedő, átskálázás után
 V (V =minden) $k < \infty$ -re ezek átskálázhatók egymásba, ekvivalensek
 pl: felhő felületének fodrozódása
 természetben túlnyomórészt növekedéssel keletkeznek a fraktálok
 elméleti vizsgálatokhoz a felosztódó szerkezet előnyösebb
 fizikai fraktál: van egy legkisebb és legnagyobb méret
 fraktál: nem 1,2 v. 3 dimenziós $\rightarrow D$ fraktáldimenzióval lehet leírni

$$N(\ell) \sim \ell^{-D}$$

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\ell))}{\ln(\ell)}$$

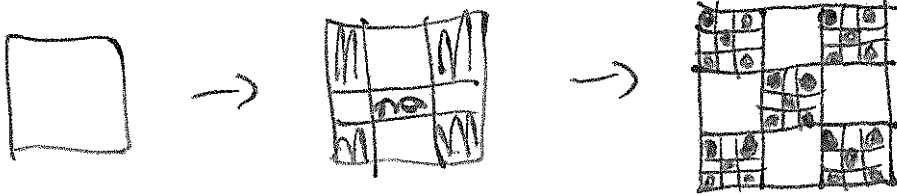
fraktáldim.



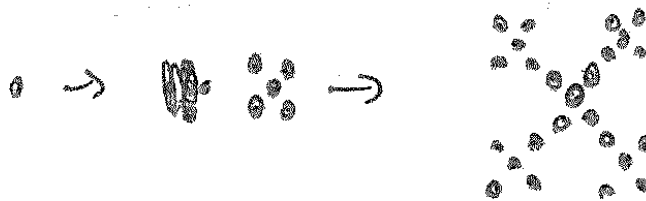
Növekvő struktúra: $N(L) \sim L^D$
 önhasonlóság \leftrightarrow hatványfgv.

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}$$

A 2 def. ekvivalens



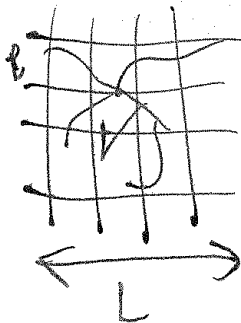
növekedővel:



$N(L) = 5^k$, $L = 3^k$ (azaz: 3-szor akkora, 5-ször annyi részecske 1 lépés után)

$$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465$$

Fiz. Fraktál: van legkisebb és legnagyobb méret (L)



$$\varepsilon_i = \frac{l}{L}$$

$$\varepsilon \ll 1$$

vagyis $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$

ez is uaz. a D lesz

Hausdorff-dimenzió:

meg akarta mérni a fraktál térfogatát (mértékét)

$$M(\varepsilon, D_h) := \inf_{\text{+ lefedés}} \sum_i r_i^{D_h} \quad r_i < \varepsilon$$

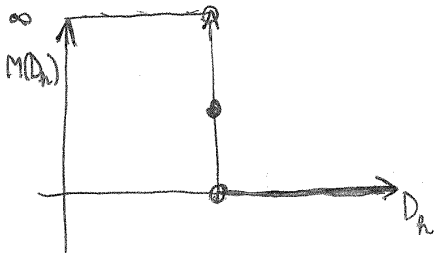
- sugarú körökkel / gömbökkel lefedjük az objektumot ← a beágyazási dim.-nak megfelelően ezek sugara különbözhet egymástól, de $< \epsilon$

optimális lefedést szeretnénk → $\sum_i r_i^{D_H}$ minimumát vesszük

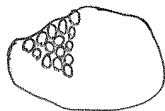


$$M(D_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(\epsilon, D_n)$$

$D_H := \sup(D_n, \text{amire } M(D_n) > 0)$, ez a Hausdorff-dimenzió



2D objektum:



$$N(r) \sim r^{-2}$$

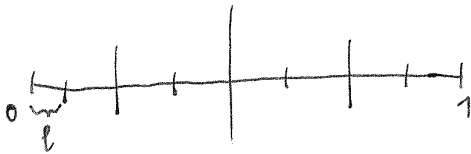
$$\sum_i r_i^{D_H} \rightarrow r^{-2} \cdot r^{D_H-2} = r^{D_H-4}$$

$D_H = 2$: véges mérték → $D_H = 2$

$D_H > 2$: 0

$D_H < 2$: $\rightarrow \infty$

Pl: rac.számok $[0,1]$ -en dimenziója:



dobozok, hány dobozban van rac.szám? $l \rightarrow 0 : N(l) \rightarrow l^{-1}$, V kis szakaszon van rac.szám

$$\rightarrow D_{\text{box}} = 1$$

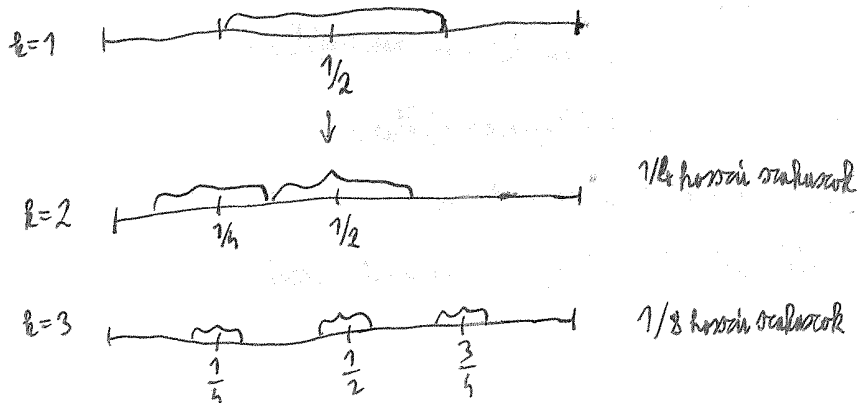
intuíció: elemei megszámlálható sokan, $[0,1]$

kontinuum számoságú

pontból áll → a dimenziója 0

Hausdorff-módszerrel:

k. lépés: $(1/2)^k$ hosszú szakaszokkal lefedés



következő rac.szám,.....

k.lépés: k rac.szám körül $(1/2)^k$ hosszú intervallum

$$M(k, D_h) = k \cdot (1/2)^{kD_h}$$

$k \rightarrow \infty$ esetén $\forall D_h > 0$ -ra $m(k, D_h) = 0$ lesz

\downarrow
 $D_H = 0$ a rac.számok dim.-ja

Hasznos összefüggések

-vetület fraktáldim.-ja: (pl. fa fényképe)

D_p dim.-ra vetítve:

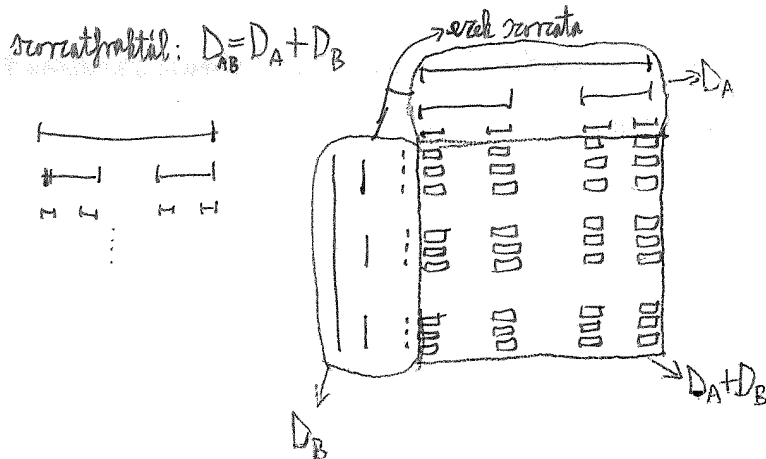
$$D_p = D \quad \text{ha} \quad d_p > D$$

$$D_p = d_p \quad \text{ha} \quad d_p \leq D$$

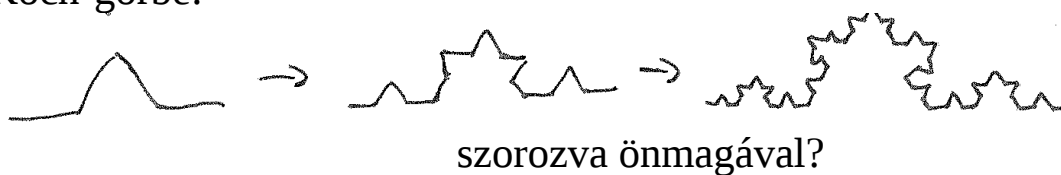
- d-m dim. metszet \rightarrow D-m lesz a fraktáldim.-ja

\uparrow
 beágyazásidim.

- 2 fraktál D_A és D_B -vel



Koch-görbe:



-2 fraktál uniója, $D_A > D_B$

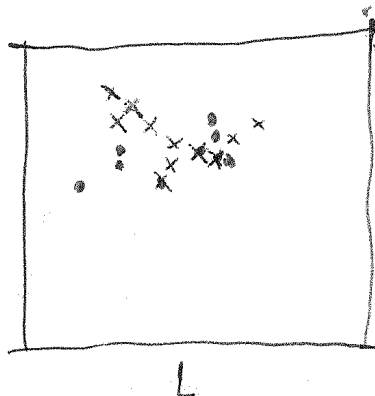
$$D_{A \cup B} = D_A$$

A befedéséhez: $N(l)^{-D_A} \sim N_A(l)$ mió: $\sim N(l)^{-D_A} + N(l)^{-D_B} \sim N(l)^{-D_A}$
 B " " : $N(l)^{-D_B} \sim N_B(l)$
 ↑
 gyorsabban divergál

-2 fraktál metszete

$$D_{A \cap B} = D_A + D_B - d$$

L méretű doboz



metszefv. sűrűsége = 2 sűrűség szorzata (sűrűség = valószínűség a fraktálhoz tartozik egy doboz)
 A, B részecskéinek sűrűsége \sim

$$\frac{L^{D_A}}{L^d}, \frac{L^{D_B}}{L^d} \rightarrow \text{összes részecské száma B-ben}$$

$$\rightarrow \text{fraktál térfogat}$$

$$\text{metszet sűrűsége} = \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$$

$$N_{\text{ANB}} \sim \text{sűrűség} \cdot L^d = \frac{L^{D_A} \cdot L^{D_B}}{L^d} \sim L^{D_{\text{ANB}}} \Rightarrow D_{\text{ANB}} = D_A + D_B - d$$

$$\text{spec.: } \left. \begin{array}{l} D_B = 2, \text{ metszet} \\ d = 3 \end{array} \right\} \rightarrow D_{\text{metszet}} = D_A - 1$$

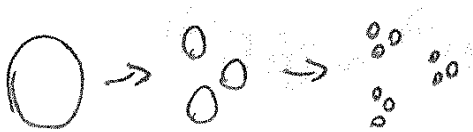
Fraktálok típusai

1., determinisztikus és véletlen fraktálok

determinisztikus fraktálok

iterációval konstruáljuk
kiinduló obj., V lépésben $1/r$ -re kicsinyített p db. másolatával helyettesítem

pl:



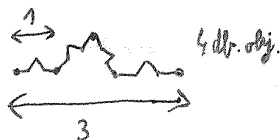
$$N\left(\left(\frac{1}{r}\right)^k\right) = n^k$$

↓

$$D = \frac{\ln n}{\ln r}$$

$$\text{Koch görbe} \rightarrow n=4, r=3$$

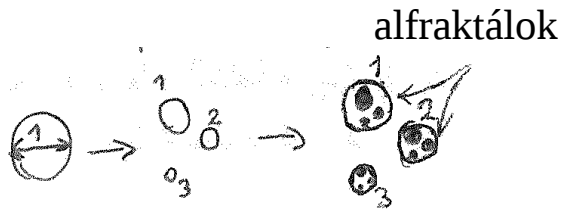
növekvőre is hasonlóan lin. méret hányszorosára nő $\rightarrow r$



hányszor ismétlem $\rightarrow n$

nem-uniform fraktál: $r_i > 1$, r_i -k különbözőek

pl:



r_1, r_2, r_3

átmérés $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$ $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \dots$

nagyon különböző méretűek is előfordulnak

$N_i(\epsilon)$: ϵ sugarú gömbök száma, amik az i . alfraktál lefedéséhez szükségesek

az egész lefedéséhez

$$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon) \quad \text{gömb kell}$$

Nem-uniform fraktál (többskálájú):

$1/r_i$ kicsinyítés

k lépés után egy adott körre:

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^l \left(\frac{1}{r_2}\right)^m \left(\frac{1}{r_3}\right)^{k-l-m}$$

hány kis dobozzal fedhető le?

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$$

$N(\epsilon) = \sum_i N_i(\epsilon)$ (dobozok száma = alfraktálok lefedéséhez szükséges dobozok összege)

$$N_i(\varepsilon/r_i) = N(\varepsilon) \quad \text{az \u00f6nhasonl\u00f3s\u00e1g miatt} \rightarrow N_i(\varepsilon) = N(r_i \varepsilon) \sim$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i}\right)^D = 1 \quad \text{egyenlet a frakt\u00e1ldimenzi\u00f3ra}$$

$$N(\varepsilon) = \sum_i N_i(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^{-D} = \sum_i (r_i \varepsilon)^{-D}$$

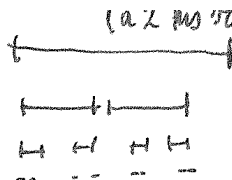
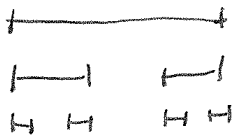
sztochasztikus frakt\u00e1l (iter\u00e1ci\u00f3val)

pl: Cantor-halmaz: elhelyez\u00e9s\u00fcik 2/3 hossz\u00fa

sztochasztikus: 1 l\u00e9p\u00e9sben v\u00e9letlenszer\u00fc

szakaszt (a 2 kis szakasz nem

l\u00f3ghat egym\u00e1sba)



uannyi lesz a lefed\u00e9shez

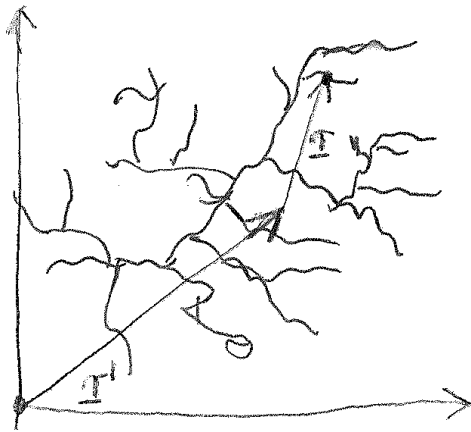
sz\u00fcks\u00e9ges szakaszok s\u00e1ma,

mint a Cantor-halmazn\u00e1l \u2192 uaz

a frakt\u00e1ldimenzi\u00f3juk

v\u00e9letlen frakt\u00e1l (nem iter\u00e1ci\u00f3val)

a legtöbb a természetben ilyen, nincsen r\u00e1 iter\u00e1ci\u00f3s szab\u00e1ly
frakt\u00e1ldim.-ja dobozokkal is m\u00e9rhet\u00f6, de c\u00e9lszer\u00fc a korrel\u00e1ci\u00f3s
fgv.-\u00e9t n\u00e9zni



ezek szerkezetét a sűrűség-sűrűség v. párkorreláció fgv. jellemzi

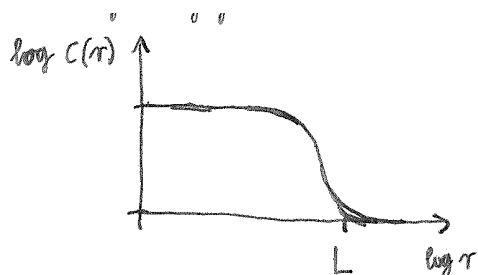
$$c(\underline{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{r}'} g(\underline{r} + \underline{r}') g(\underline{r}')$$

$g(\underline{r}) = 1$, ha \underline{r} az objektumhoz tartozik
 $= 0$, különben

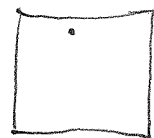
$c(\underline{r})$: mi a val.szín.-e, hogy \underline{r} távolságra J egy részecskéje a fraktálnak, ha \underline{r}' a fraktálon van.

általában a fraktál, $c(\underline{r}) = c(|\underline{r}|) = c(r)$

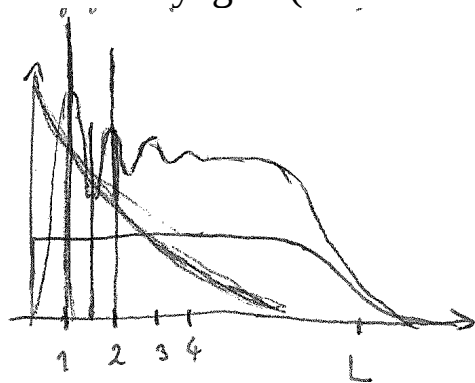
homogén anyagra:



L-hozzá, homogén négyzet:



atomos anyagra: (L méretű rdsz.)



— fraktál
 szilárd (de: fraktál anizotróp, $c(r)$ lesz)
 folyadék
 gáz

fraktál önhasonló $\rightarrow c(b r) \sim b^{-\alpha} c(r) \rightarrow c(r) \sim r^{-\alpha}$

L sugarú gömbben levő részecskék száma: $N(L) \sim \int_0^L c(r) d^d r \sim L^{d-\alpha} \sim L^D$
 $\Rightarrow D = d - \alpha$

Példák:

1., Cantor-halmaz (3-ad részét középről kivágjuk)

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$$

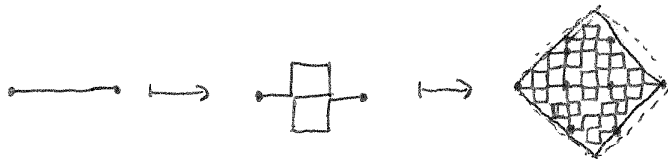
által. n his szakasz, $1/r$ hosszú $\left. \begin{matrix} n=2, r=4 \\ n=3, r=9 \end{matrix} \right\} D = \frac{1}{2}$, de a két fraktál másoként néz ki



uaz., mint:



3.) Peano-görbe, 2D vonal $\rightarrow D = \frac{\ln 9}{\ln 3}$



sűrűn behálózza a piros

négyzetet,

tetsz.

ponthoz közel kerül

megj: racionális számok Haudorff-dimenziója $D_H = 0$

Cantor_halmaz: rac. pontok a végpontjai \rightarrow mégse lesz $D_H = 0$

4., Sierpinski-szűrő



mindenféle mértékű luk lesz rajta

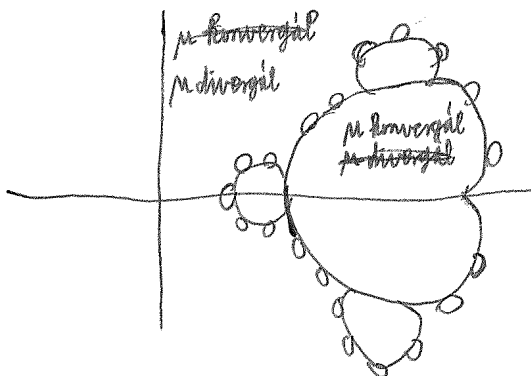
$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

5., Mandelbrot-halmaz

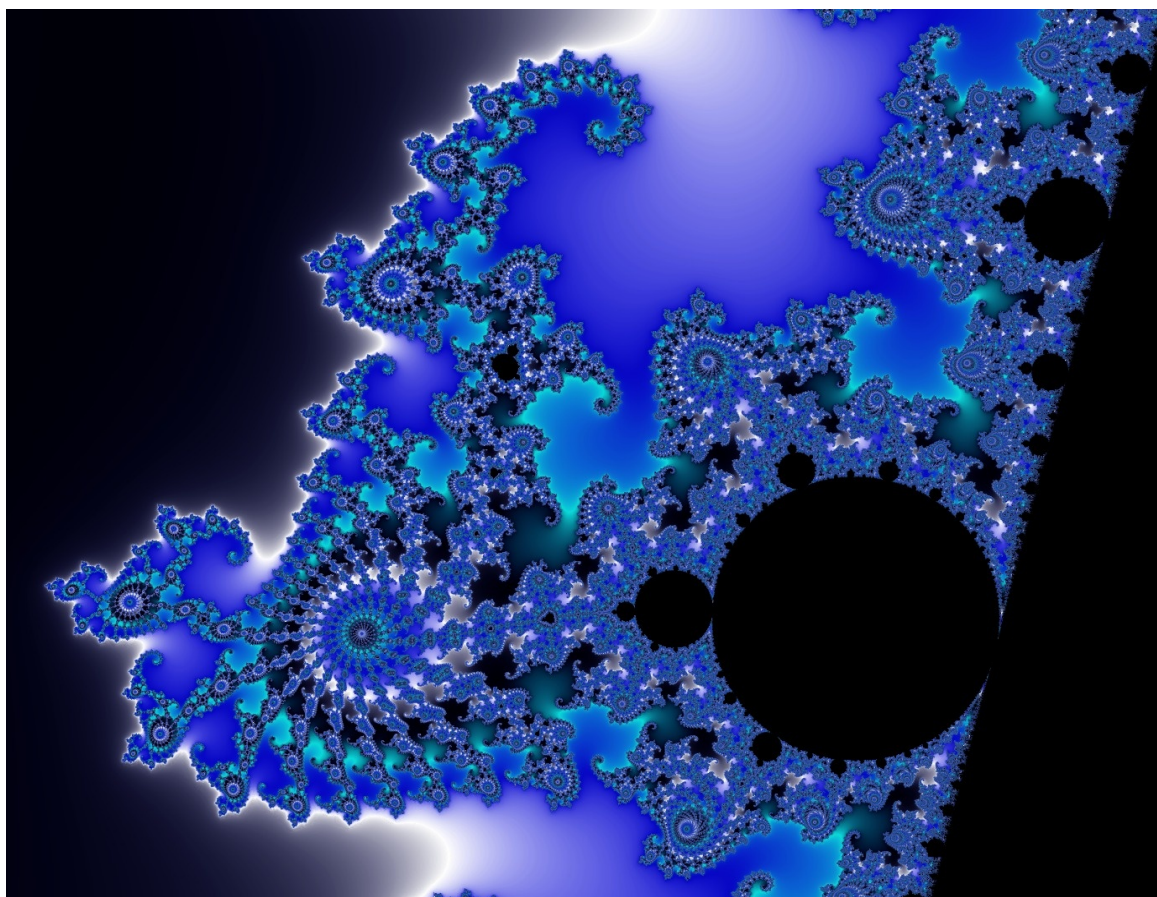
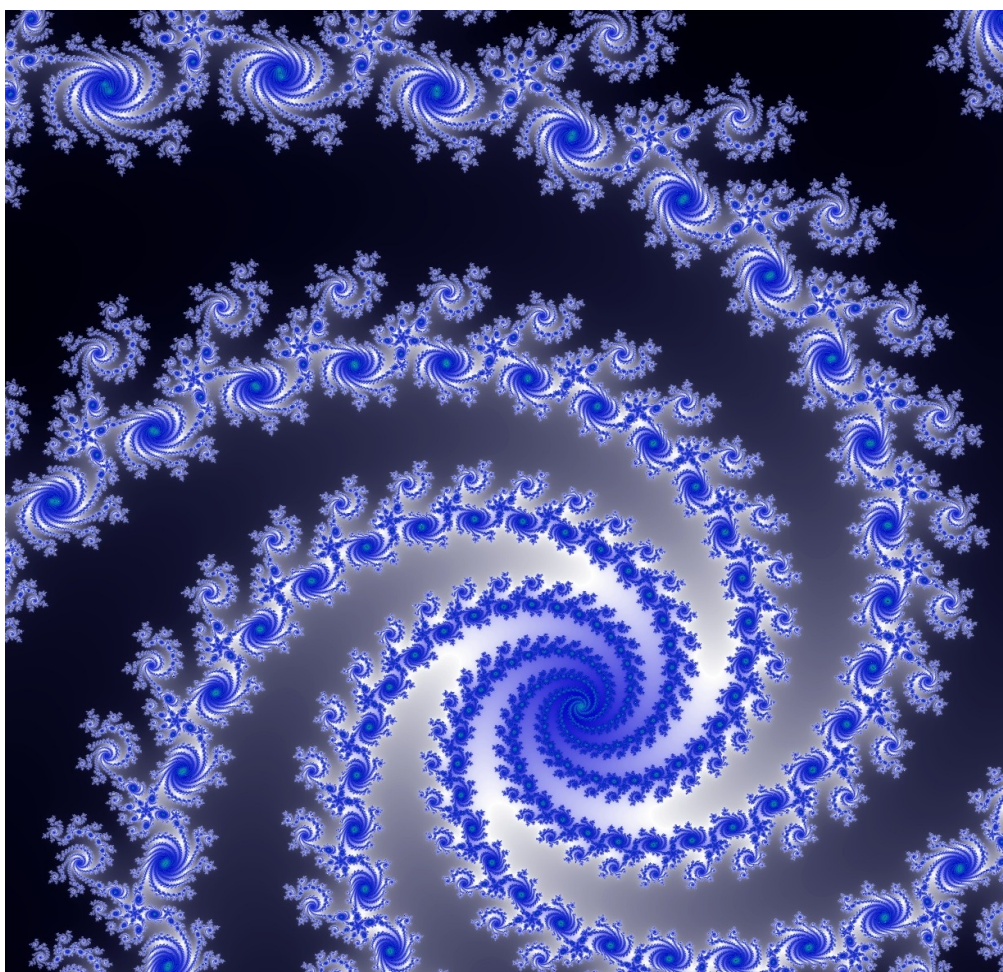
$$\mu, z \in \mathbb{C}$$

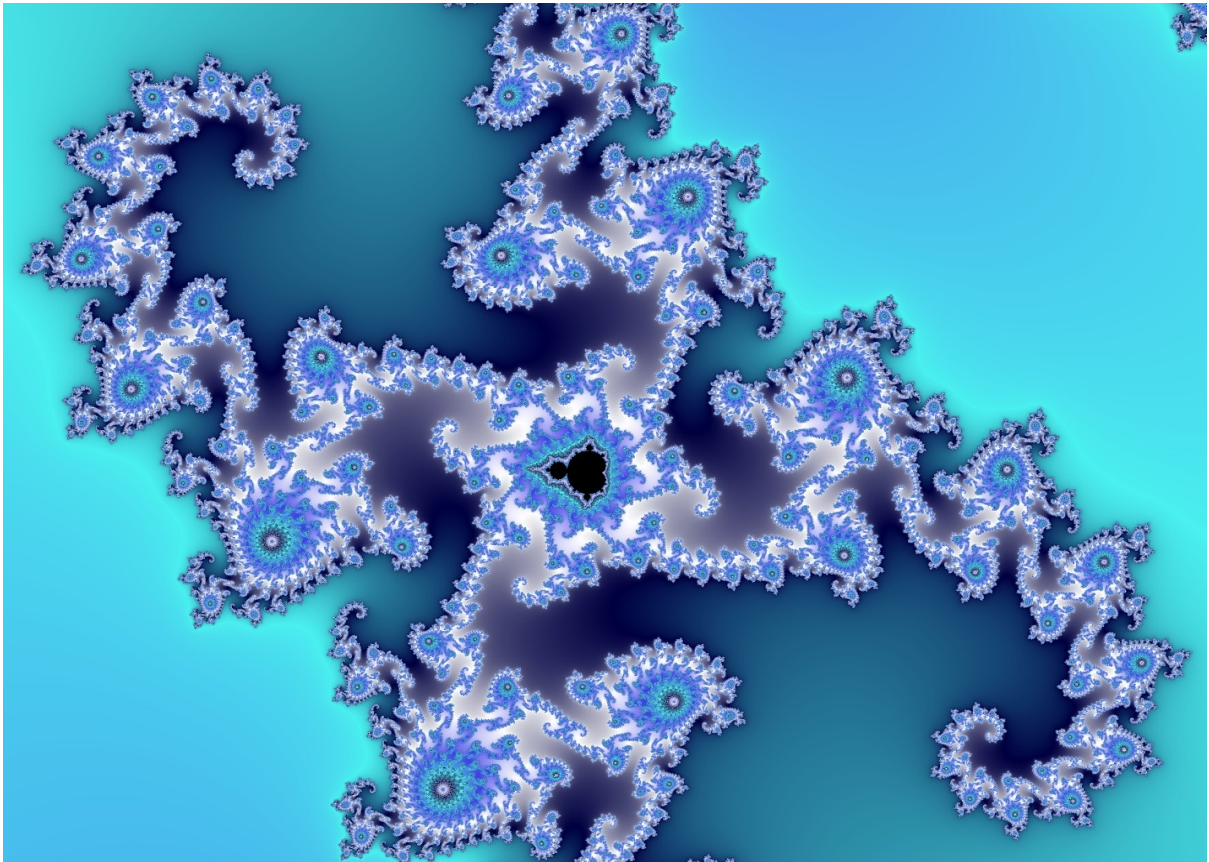
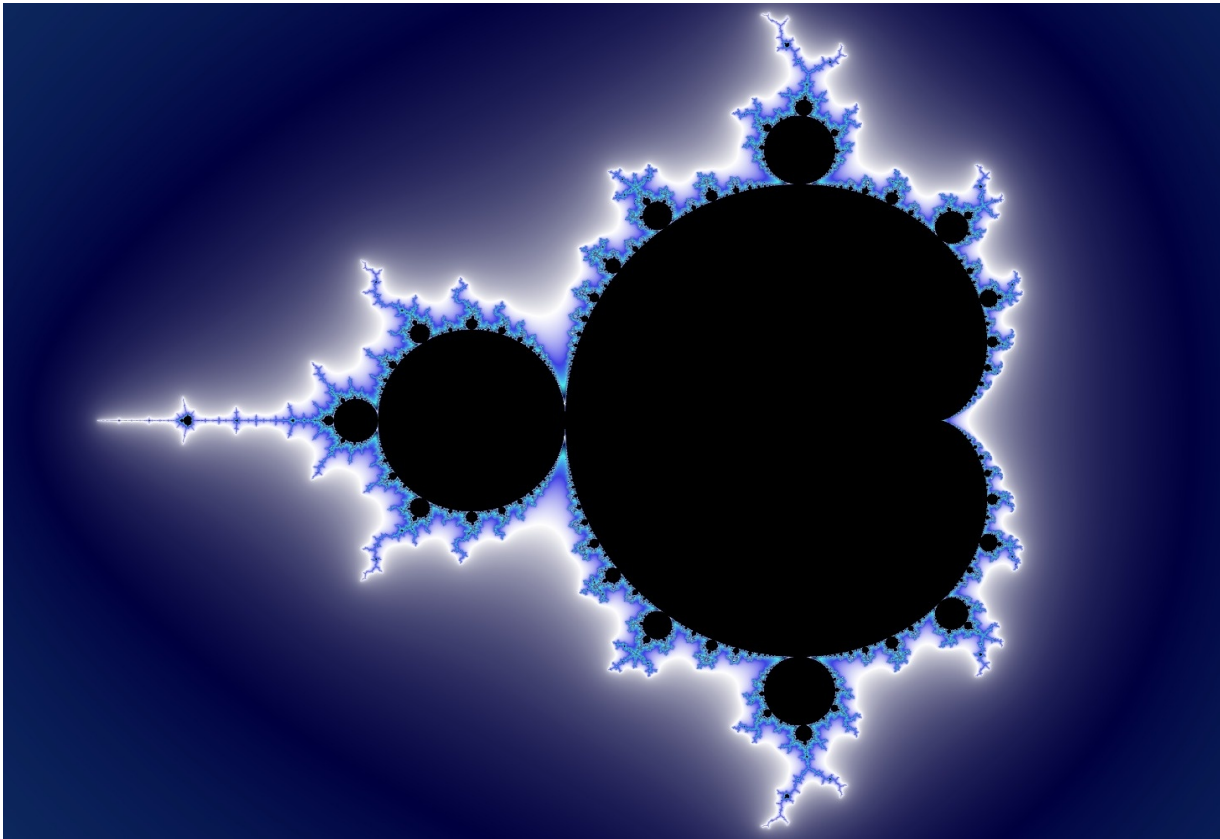
$$z_{k+1} = z_k^2 - \mu$$

$z_0 = 0$, $k \rightarrow \infty$ esetén milyen μ -re konvertál?



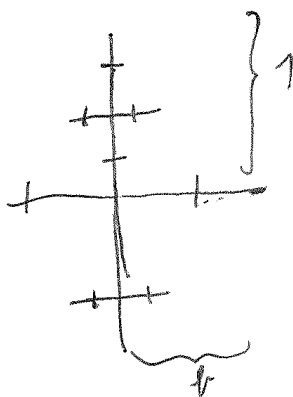
a 2 közti határ egy fraktál





6.,

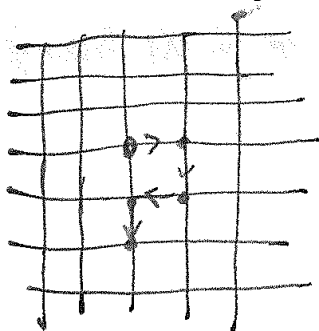
$$\sum_{j=1}^m \tau_j^{-D} = 1$$



$$2\left(\frac{r}{2}\right)^D + 2\left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

$$\text{pl: } r=1/2 \rightarrow D = \frac{1 - \ln(\sqrt{3}-1)}{\ln 2} \approx 1,45$$

7., véletlen bolyongás (sztochasztikus fraktál)



rács, ezen lépkedek véletlen irányokba folytonos modell, vagy:

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t \quad d\text{-től függetlenül}$$

Poisson-elv. szerinti hossz,

↓

véletlen irány

$$\langle R(t_1) \rangle \sim t^{1/2}$$

a 2 uabba az univ. osztályba tartozik

vizsgáljuk a bolyongó részecske pályáját, azaz V lépésben

leteszünk egy részecskét oda, ahol épp van a bolyongó részecske

↓
 $N(R) \sim t \sim \langle R^2(t) \rangle \rightarrow D = 2$ a beágyazási dim.-tól függetlenül

ha a beágyazó dim. 2 → paca, nem fraktál
 3 → fraktál lesz

8., Levy-repülés

folyt. bolyongás általánosítása

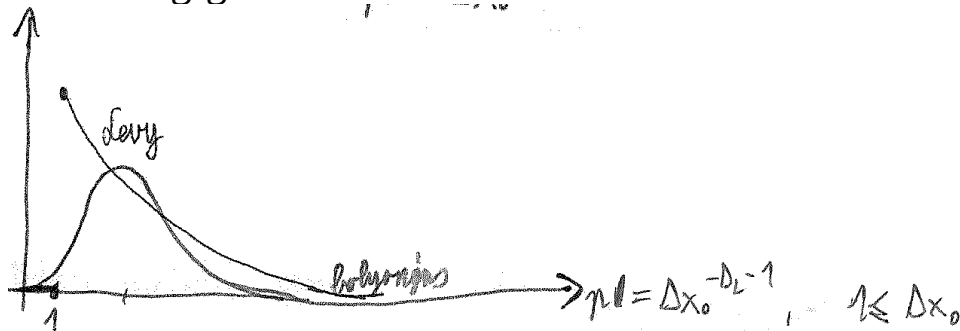
V irány uolyan val.szín.-gel

a távolság, amennyit egy irányba megy, most nem Poisson-elv.,

Δx hosszú ugrás

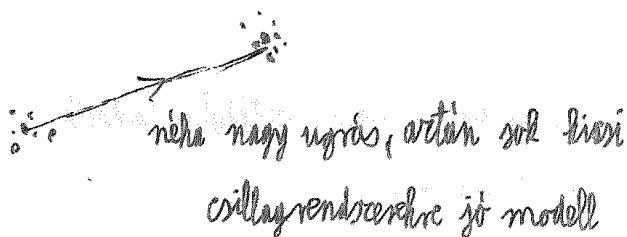
$$\begin{cases} P(\Delta x > \Delta x_0) = \Delta x_0^{-D_L}, & \text{ha } \Delta x_0 \geq 1 \\ P(\Delta x > \Delta x_0) = 1, & \text{ha } \Delta x_0 < 1 \end{cases}$$

→ sűrűségfgv.-e:



hatványfgv. → nagy ugrások valószínűsége sokkal nagyobb, mint exp. lecsengésnél

képe:



fraktáldim. $D = D_L$, ha $D_L < 2$

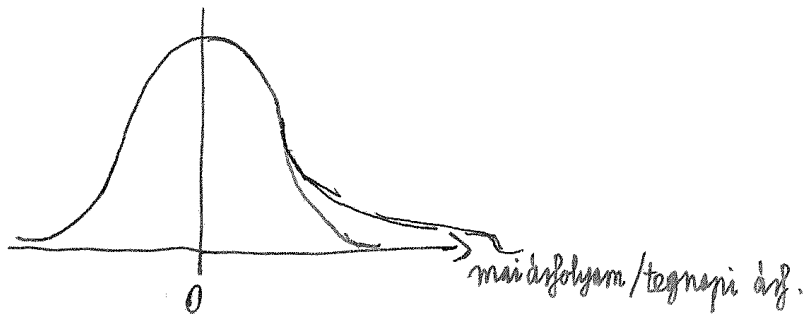
$D = 2$, ha $D_L > 2$ ha gyorsan csökken, úgygy

viselkedik, mint exp. lecsengésnél

több állat is ehhez hasonló stratégiával kutat a táplálék után (pl: albatrosz)

ez hatékony módszer, különösen, ha a táplálék is fraktál eloszlású

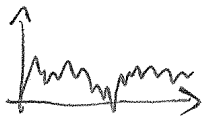
részvényárfolyamok fluktuációja



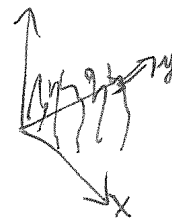
- Gauss elv.: ha teljesen véletlenek a befolyásoló tényezők → bolyongásra visszavezethető
- valódi piacon: Levy-bolyongással jobban modellezhető, hatványfgv. lecsengésű a vége

Önaffin fraktálok

nem önhasznók az eddigi értelemben
most hosszakat irányfüggő faktorokkal kell skálázni
fgv.: egyértékű hozzárendelés
fraktálfgv.: J egy kitüntetett irány (a függőleges), amire máshogy skálázódik

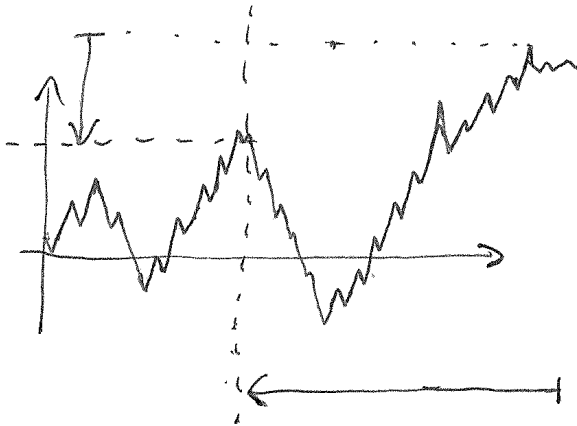


v. Regylánc:

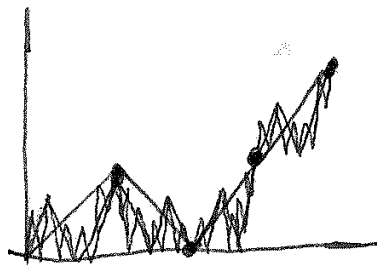


fraktál - felület
 $x \sim y$ síkban ált. izotrop

ha $F(x) \approx b^{-H} F(b \cdot x)$, $H > 0$, és $F(x)$ egyértelmű, seholsem deriválható \rightarrow önaffin



determinisztikus önaffin fraktál:



-1. lépés

-2. lépés

-3. lépés függ.: irányba felére, vízsz.

$\frac{1}{4}$ -ére húzom

.

.

.

∞ finom \rightarrow minden pontjában törés, sehol

sem lesz deriválható

sok kis lépés véletlen irányba \rightarrow sztoch. önaffin fraktál lesz (ekkor lesz alsó levágás is)

\downarrow
v. föl, v. le

\downarrow
1 D Brown-mozgás (bolyongás) $x(t)$ fgv.-

e

uez. ruletten a nyert összeg, ha mindig pirosra teszünk

nyerés: ha $F > 0$, vesztes: ha $F < 0$

nullahelyek eloszlása: $D_{ANB} = D_A + D_B - d = 0,5 \rightarrow$ fraktál eloszlás
 $\begin{matrix} D_A & D_B & d \\ 1,5 & 1 & 2 \end{matrix}$

nyerési-vesztési sorozatok
 nyerő stratégia a ruletten
 határa

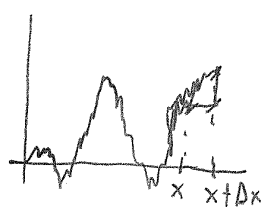
önaffin
 fraktál

vizsz.
 tengely

nincs

ekvivalens definíció:

$$\langle |F(x+\Delta x) - F(x)| \rangle \sim \Delta x^H \quad 0 < H < 1$$

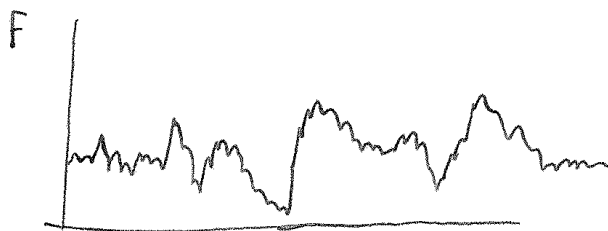


$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \Delta x^{H-1} \rightarrow \infty, \text{ ha } H < 1 \rightarrow \text{nehogy differenciálható}$$

lokális és globális dimenziók:

pl. úttest felülete: kis ($1\mu\text{m}$ - 1mm) skálán összevissza változik, fraktálszerű



nem lép át,

fraktál

tfh. $\Delta F \sim \Delta x^H$

de: F bizonyos korlátokon

nem igazi

ha $\Delta x \ll 1$: $\Delta F > \Delta x$, $H < 1$ lesz \rightarrow lokálisan „szőrös” fgv.

ha $\Delta x \gg 1$: $\Delta F < \Delta x$,

x_c : $|F(x+x_c) - F(x)| \sim |x_c|$ karakterisztikus hossz, itt vált a 2 viselkedés

x_c : átcsapási hossz

pl: 1D bolyongó részecske

(v. több dim. részecske bolyong, vetülete 1 tengelyre, ez is bolyong, de nem pont úgy,

mint az 1D részecske, pl: részecske ugorhat a tengelyre ~~b~~-en, ekkor nincs elmozdulás

a vetületben)

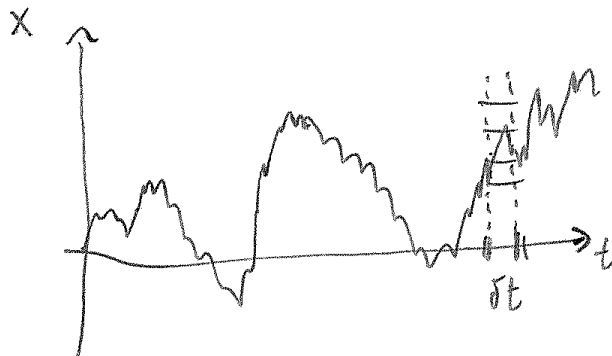
véletlenszerűen választjuk az irányt, (nem feltétlen 0.5-0.5 val.szín.-gel, pl. ha az irány

val.szín.-e függ a múlttól is)

$$\langle X_H^2(t) \rangle \sim t^{2H} \quad H = \frac{1}{2}; \text{ Brown-mozgás}$$

$$0 < H < 1, \quad H \neq \frac{1}{2}; \quad \text{fraktál Brown-mozgás}$$

mi a fraktál Brown-mozgás fr.dim.-ja?



dobozok száma, amik átfednek a fraktállal: egy oszlopban $\frac{\delta t^H}{\delta t}$ doboz kell, mert $|\Delta x| \sim \delta t^H$

$$\Rightarrow N(\delta t) \sim \frac{\delta t^H}{\delta t^2} = \delta t^{-(2-H)}$$

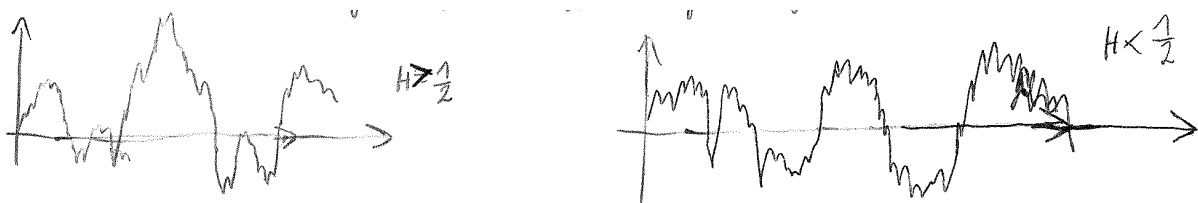
$$\Rightarrow D_B = 2-H \quad (D_B: \text{box-dimenzió})$$

ált.: $D_B = d - H$, ahol d a helyszín dim.

$x_H(t)=0$: zéro-halmaza a Brown-mozgásnak

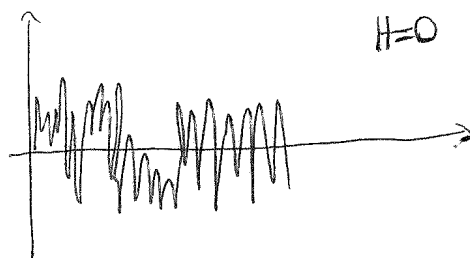
ez egy véletlen Cantor-halmaz, $D=1-H$ dim.-val

$H > 1/2$: az ugrások korreláltak az előző ugrás irányával



$H > 1/2$: közelebb van a vonalhoz, vonalra $H=1$

fehér zaj:



$H > 1/2$: perzisztens fraktál, pozitív korreláció van az ugrások iránya között

előző lépés \uparrow : mostani lépésre: $p_t > p_t$
 előzővel korrelál \rightarrow a korábbiakkal is

$H < 1/2$: antiperzisztens, negatív korreláció

előző $\uparrow \rightarrow p_{\downarrow} > p_{\uparrow}$

$H = \frac{1}{2}$: nincs korreláció, Brown-mozgás $p_{\uparrow} = p_{\downarrow}$

biz: legyen $X_H(0) = 0$,

$-X_H(-t)$ múltbeli növekmény
 $X_H(t)$ jövőbeli növekmény

Korrelációjuk: $\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X_H(t) - X_H(-t)]^2 \rangle - 2 \langle [X_H(t)]^2 \rangle \} = \frac{1}{2} (2t^{2H} - t^{2H})$ $\therefore \langle X_H^2(t) \rangle = t^{2H}$

$\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^H$, és $\langle X^2(\Delta t) \rangle \sim \Delta t^{2H}$
 \parallel
 $\langle (X(t+\Delta t) - X(t))^2 \rangle$

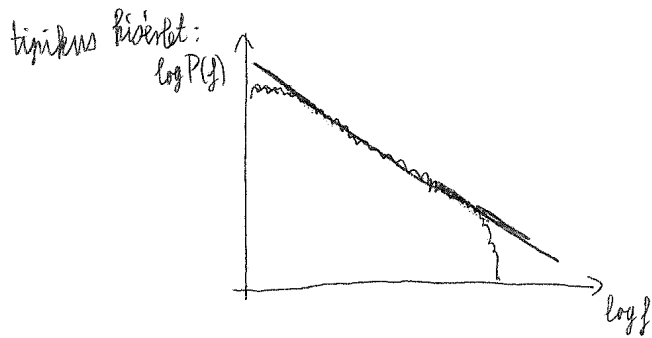
$\frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1$ időtől független korreláció

Korreláció nem cseng le!

Fourier-spektrum

véletlen, önaffin-fgv.szerű jel Fourier-spektruma

f: frekv., $A(f)$ előjele változhat, $|A(f)| \sim f^{-H-1/2}$



$P(f)$: teljesítmény-spektrum,

$$P(f) \sim A^2(f)$$

pl: tőzsdén $H \approx 0.55 \rightarrow$ van egy kis korreláció, de nem elég a meggazdagodáshoz

pl: Weierstrass- Mandelbrot fgv. (1872)

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}$$

fraktálfgv.

$1 < D < 2, \quad b > 1$

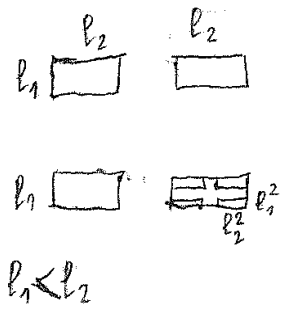
$C(t)$ folytonos, de $\frac{dC(t)}{dt}$ divergál mindenhol

$n \mapsto n+1$ helyettesítés $\Rightarrow C(t) = b^{-(2-D)} C(bt) \Rightarrow$ önaffin fgv.

$\cos(b^n t)$ ~~átmenet~~ \rightarrow nincs határt. Behv.

$\frac{1}{b^{(2-D)n}} \rightarrow$ lecsengő amplitúdó, határvégf.

pl: 2 Cantor-halmaz szorzata is önaffin fraktál, ha $l_1 \neq l_2$



$$D_1 = \ln 2 / \ln(1/l_1) \text{ és } D_2 = \ln 2 / \ln(1/l_2) \Rightarrow D_L = \frac{\ln 2}{\ln(1/l_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/l_2)}$$

kis részhalmaz: elnyúlik, affin trf.-val kihúzva az egész fraktálra visszaadja az eredeti fraktált

Kövér fraktálok

eddig: $D < d$

def.: térf. mérése, hatványfgv. szerint változik a doboz méretével

eddig: $\rightarrow 0$, v. $\rightarrow \infty$, de tarthat hatványfgv. szerint egy véges számhoz is

$$V(l) = V(0) + f(l)$$

$V(0) = V_0$: térfogat az $l \rightarrow 0$ határértékben

(~~is~~ $f(l)$) minden fraktálra $V_0 = 0$

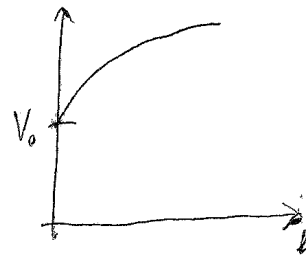
$$\text{és } f(l) \sim l^{d-D}, \quad D < d$$

$$V(l) \approx V(0) + A \cdot l^\beta$$

$$\beta = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln[N(l)l^d] - V(0)}{\ln l}$$

nem fraktál: exp. tart. v. hová

$\beta > 0$, és $\beta = \infty$ nem-fraktál alkalmazható



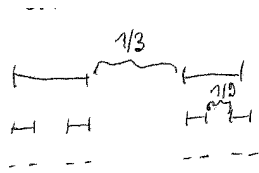
$N(l)$: d -dim. labdák száma, amikkel lefedjük a fraktált

Peano-görbe nem kövér fraktál

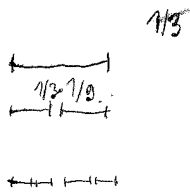
pl: módosított Cantor-halmaz

Cantor-halmaz

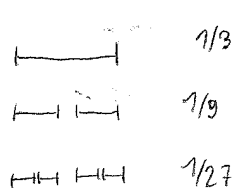
módosított



$\forall n \neq 1/3$ -át szedjük ki



$1/3$



részt veszik ki

a kivett szakaszok hossza $\rightarrow 1$
egyesített hossza kisebb, mint

a kivett szakaszok

$1 \rightarrow$ véges

hossza lesz a maradványnak



0 a hossza

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = 1$$

Cantor-halmaz, a végén

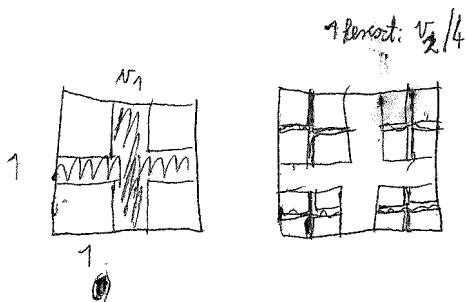
kövér fraktál nem önhasonló

általános:

d dim. hiperkocka, egységnyi élhossz kivágunk v_1 térf. „keresztet”

\rightarrow a maradék

kockákból v_2 térfogatot



a maradék térfogat: $V_k = (1-v_1)(1-v_2)(1-v_3)\dots(1-v_k) = \prod_{i=0}^k (1-v_i)$

$$V_k \rightarrow V, \text{ ha } k \rightarrow \infty$$

$$\text{Ha } \sum_0^{\infty} v_k < \infty \Rightarrow \prod_0^{\infty} (1-v_k) > 0$$

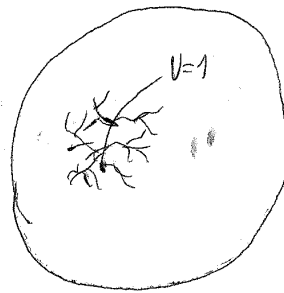
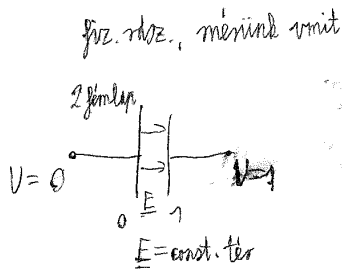
Fraktál mértékek (Multifraktálok)

tfh. van egy önhasznló fraktál, ennek pontjaihoz hozzárendelünk egy skalárt (\sim skalármező)



bonyolultabb lesz,

mint egy fgv.



vezető fraktál

$E=?$

$E=grad U$

csúcsoknál \Rightarrow csúcsoknál $E=grad U \rightarrow \infty$

hővezetés, koncentráció, elektr. tér \rightarrow Laplace-egyenlet

2 D, Laplace-egy. megoldása

szemléletesen:

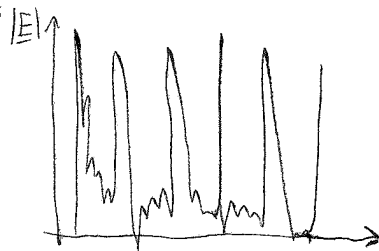
gumihártya a peremre, a fraktál mentén

megemelem \rightarrow a gumihártya alakja

lesz a Laplace-egy. megoldása, csúcsnál ∞

meredek lesz

$|E|$ eloszlása a fraktál mentén:



van, ahol 0, van ahol ∞ ,

sehol

sem lesz folytonos \rightarrow nem

fgv., hanem mérték lesz

mérték: A halmaz, a mértéke μ_A

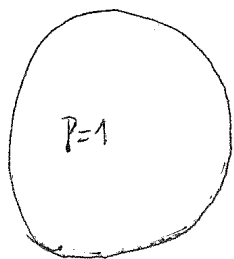
$$M_{A \cup B} = M_A + M_B \text{ ha } A \cap B = \emptyset$$

ilyen pl: tömeg, valószínűség

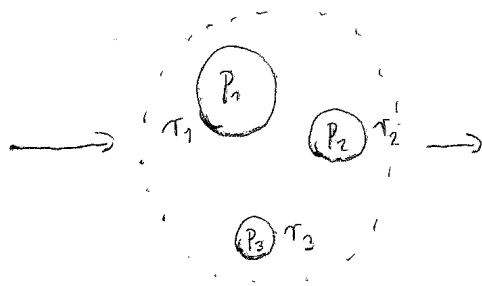
normális: $\int_P \mu d\mu = 1$ az egész tartományra

Multifraktál

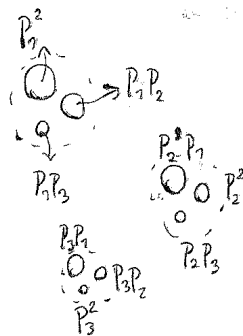
pl: _____



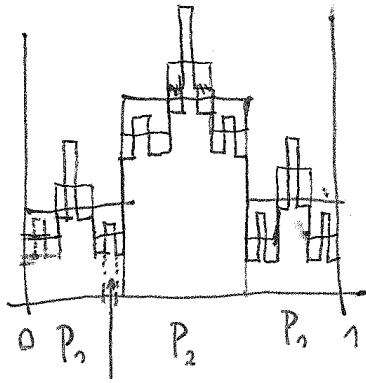
7 mértéket rendelünk hozzá



P_1, P_2, P_3 mértékek,
és $P_1 + P_2 + P_3 = 1$



pl:



multiplikativ folyamat
 pl: $P_1 P_1 P_2$ lesz területe $2P_1 + P_2 = 1$

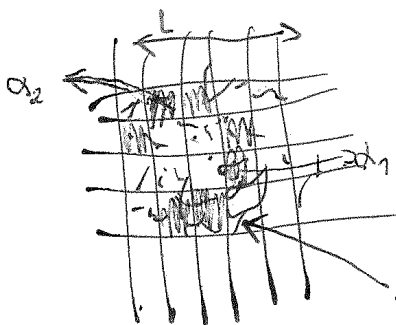
Itt most fraktál mérték lesz,
 de a „tartója” nem fraktál, hanem a $[0,1]$ szakasz

a végén minden pontban vagy majdnem 0, vagy majdnem ∞
 (különböző ∞ -ek lesznek)

$$P_1 < P_2, \quad k \gg 1 \rightarrow P_1^k \gg P_2^k$$

k lépés után $P_1^k \cdot P_2^{k-1}$ tagok jönnek be

d .dim., l hosszú dobozokkal lefedünk egy fraktált, (ami a tartója a mértéknek)



i . dobozhoz μ_i mérték tartozik $(\sum_i \mu_i = 1)$

$\varepsilon_i = l/L$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (azaz $l \rightarrow 0$ vagy $L \rightarrow \infty$)

$$\mu_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_i}$$

Poljt. fgv.: $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon$, vagy $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ fgv.-nél $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$

ált. egy adott α -hoz több doboz tartozik, azaz nézzük azon dobozok számát, amikre

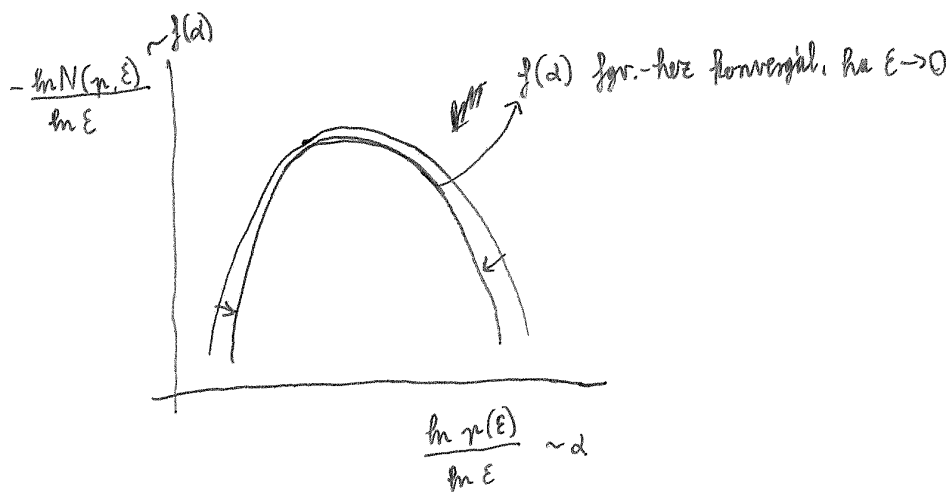
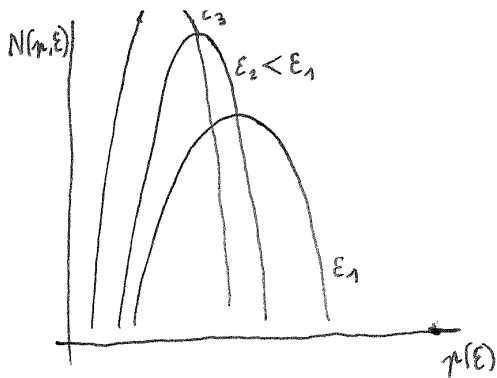
$$r_i \in [r, r+dr]$$

multiplikatív folyamatra: $N_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)}$ (1)

↓

α kitevőjű dobozok száma

→ hisztogram



ált.: ez az $f(\alpha)$ fgv. uaz, mint $f(\alpha)$ (1)-ből kifejezve

csak azt hívjuk multifraktálnak, ahol ez egy nemtriviális fgv.
 folytonos fgv. $\rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ esetén egy pontot kapunk a görbe helyett

$$p_i, \mathcal{E} \rightarrow 0 \Rightarrow \ln p_i, \ln \mathcal{E} \rightarrow -\infty \text{ hányadosuk véges}$$

$$\text{szórása véges marad} \rightarrow \text{val.szín.-gek szórása} \rightarrow 0$$

multifraktál: ahogy a doboz mérete $\rightarrow 0$, a val.szín-gek szórása $\rightarrow \infty \rightarrow$ nem egy pontot kapunk
 $f(\alpha)$ fgv. \rightarrow (1) alapján az a kitevőjű dobozok egy $f(\alpha)$ dim. fraktálon helyezkednek el

multifraktálok: ∞ sok fraktál uniója, ∞ sok különböző dimenziójú alfraktált

jelöl ki az eloszlás

sok fraktál uniójának dim.-ja a legmagasabb dim. fraktál dim.-ja $\rightarrow D = \max f(\alpha)$

$f(\alpha)$

α): spektrum

Multifraktál formalizmus

def. eloszlás q -dik momentuma: $\chi_q(\mathcal{E}) \equiv \sum_i p_i^q$ $-\infty < q < \infty - \text{re}$

$$q=0: \chi_0 = N(\mathcal{E}), \text{ mert } 0^0 = 1, p_j \neq 0 \text{ -ra } p_j^0 = 1$$

$$\chi_0 = N(\mathcal{E}) \sim \mathcal{E}^{-D} \quad (D: \text{ a fraktál dim.-ja})$$

$$\chi_1(\mathcal{E}) = 1, \text{ mert normált az eloszlás}$$

$$\mathcal{E} \rightarrow 0: \chi_q(\mathcal{E}) \sim \mathcal{E}^{(q-1)D_q}$$

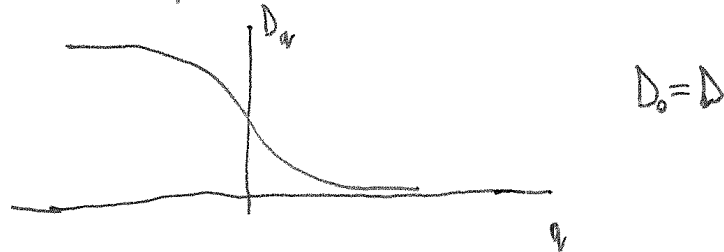
ez is lehetne a multifraktál def.-ja

\uparrow

D_q : nem-triviális q függés benne marad $\mathcal{E} \rightarrow 0$

esetén is

feltétele: $\forall q$ -ra $D_q \geq 0$, és D_q monoton csökken q növekedésével



$(q \rightarrow 1)$ választás $\rightarrow X_q(\epsilon) = 1$ teljesül automatikusan

normál fraktál: minden $D_q = D$

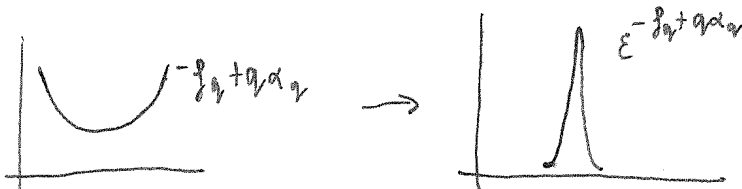
$$X_q(\epsilon) = \sum_i p_i^q, \quad \epsilon \rightarrow 0;$$

a legtöbb egy f_q dim-os alfraktálból jön

$N_q(\epsilon) \sim \epsilon^{-f_q}$, és ezekre uaz. a p_i , legyen ez p_q

$$\text{és } X_q(\epsilon) = \sum_i N_q(\epsilon) p_q^q + \text{többi doboz jánulék} \approx N_q(\epsilon) p_q^q(\epsilon)$$

$N_q p_q^q \approx \epsilon^{-f_q + q \alpha_q}$, éles maximuma van, ha $\epsilon \rightarrow 0$, $-f_q + q \alpha_q$ minimumánál



egyszerű fraktálra $f_q = \alpha_q = D$

$$\left. \begin{aligned} \chi_q &\approx N_q(\varepsilon) p_q^q \sim \varepsilon^{-f_q + q\alpha_q} \\ \text{és } \chi_q &\sim \varepsilon^{(q-1)D_q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (q-1)D_q = q\alpha_q - f_q \quad (*)$$

összefüggés az exponensek között

$$\Rightarrow D = D_0 = f_0$$

$$f \text{ véges} \Rightarrow D_{\pm\infty} = \alpha_{\pm\infty}$$

$$\chi_q(\varepsilon) \sim \int_{\alpha_{\infty}}^{\alpha_{-\infty}} \varepsilon^{q\alpha' - f(\alpha')} d\alpha' \leftarrow \text{def. átírva } \Sigma \text{ helyett }]\text{-lal, } p_{\alpha_i} \sim \varepsilon^{\alpha_i}, N(p, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}$$

felhasználásával

- $\ll 1$: ez f -t az a tag dominálja, ahol α minimalizálja az exponenst \rightarrow

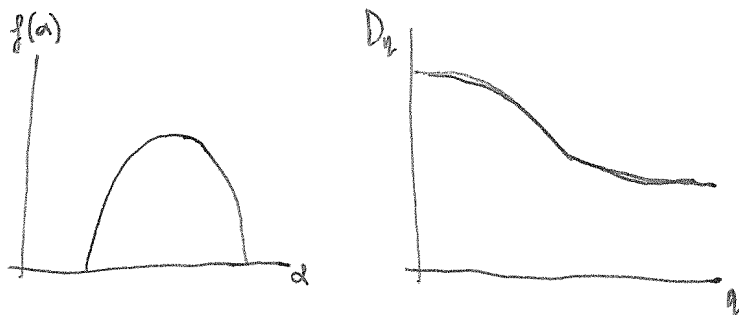
$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} [q\alpha - f(\alpha)] \right|_{\alpha_q} = 0, \quad \alpha_q \text{-re minimalis } q\alpha - f(\alpha),$$

és $f_q = f(\alpha_q)$, mert ekkor konvexitása miatt az Σ felírás

$$\text{és } (*) \Rightarrow \alpha_q = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]$$

és f_q, α_q ismeretében $f(\alpha)$ is meghatározható $f_q = f(\alpha_q)$ -ból

megj.: D_q és $f(\alpha)$ egymás Legendre-transzformáltjai

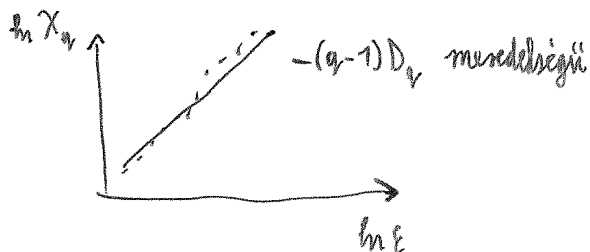


kísérleti adatok kiértékelése:

dobozok, dobozokra p_i súlyok (mérték)

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln \epsilon} \right]$$

$D_q \Rightarrow f(\alpha)$ num. deriválással



$$q = 1 - \tau$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{(q-1) \ln \epsilon} =$$

$D_0 = D_1$, $\chi_1 = 1 /$
 $q=1$ -nél meredék 0 \Rightarrow határértéket vesszünk

$$= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{d/dq \ln \sum_i p_i^q}{d/dq [(q-1) \ln \epsilon]} = \dots \Rightarrow - \sum_i p_i \ln p_i \sim D_1 \ln(1/\epsilon)$$

L' Hospital szabály
 információ definíciója

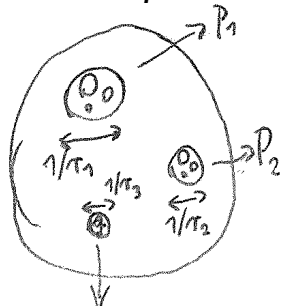
olyan alakú, mint a Shannon-féle

p_i eloszláshoz rendelt információ

D_i : információs dimenzió

tétel: egy(fraktál-tartójú) eloszlás $D_1 < D$ -re multifraktál.

Rekurzív fraktál mértékek (determinisztikusan konstruált)



$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_1^m P_2^m P_3^{k-n-m}$$

alábbi súlyok

P_3 súlyokkal
 átskálázhatók, v. az egész is

az egyes alfraktálok egymásba

megkapható belőlük

$$\chi_{q,j}(\varepsilon) = \sum_i P_{j,i}^q = \underbrace{P_j^q}_{\text{valószínűség}} \underbrace{\chi_q(\varepsilon \cdot \tau_j)}_{\sim \varepsilon^{-(q-1)D_q} \text{ térbeli skálázása}}$$

skálázás

valószínűség

térbeli

skálázása

$$\text{és } \chi_q(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \chi_{q,j}(\varepsilon)$$

/összesen n alfabattól/

$$\sum_{j=1}^n P_j^q \tau_j^{(q-1)D_q} = 1$$

implicit egyenlet D_q -ra

ha $\forall \tau_j = \tau$:

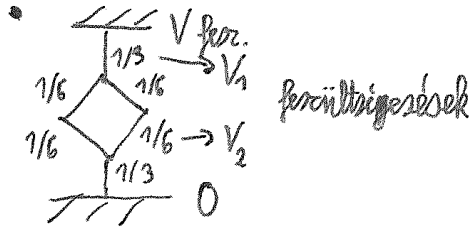
$$D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln\left(\sum_{j=1}^n P_j^q\right)}{\ln(1/\tau)} \quad \text{megoldás}$$

ha $\forall P_j = P$: nem lesz multifraktál

Példák

p11: növekvő-hálózat

1. lépés

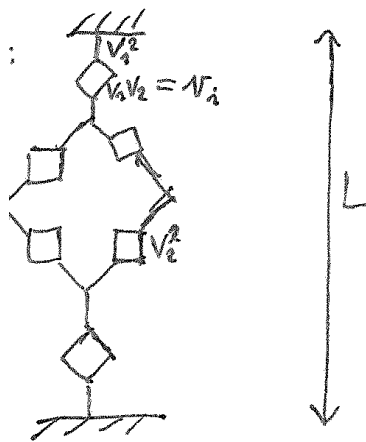


az összes feszültséget összeadva

nem normált

normált lesz $V_0 = 3/4$ esetén

2.lépés



v_i feszültségek az egyes ágakon

$$\sum_i v_i^q \sim L^{-(q-1)D_q}$$

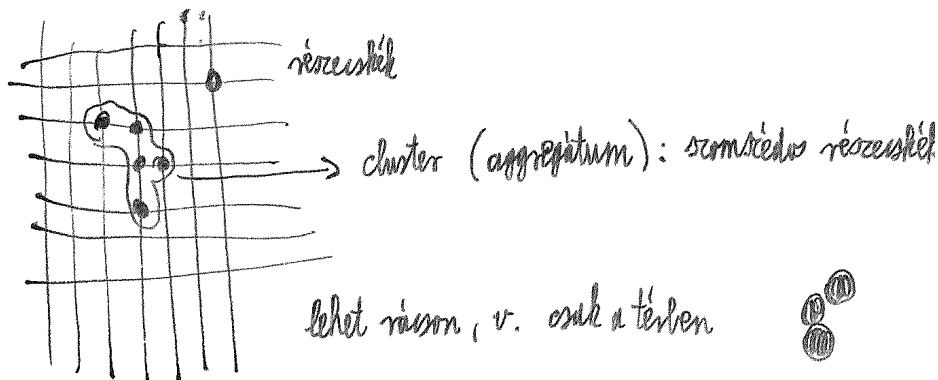
$$\sum_i v_i^q = \sum_m N_m v_m^q = (2V_1^q + 4V_2^q)^q$$

$L \approx (2/3) 3^R$

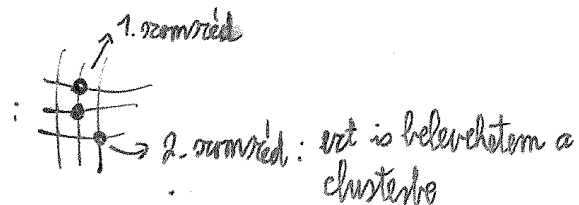
$$N_m = 2^{k+m} \binom{k}{m} \text{ és } v_m = V_1^{k-m} V_2^m \quad (0 \leq m \leq k)$$

$$\Rightarrow D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\ln \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^q + 4 \left(\frac{1}{6} \right)^q \right]}{\ln(1/3)}$$

Lokális növekedési modellek



clusterhez meg kell adni, melyek szomszédos részecskék:



ált. sztochasztikus növekszik, az új részecske adott val.szín. szerint kerül vhová

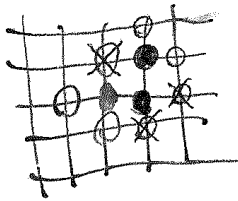
minden lehetséges cluster létrejöhet

vmilyen szabály már meglévő cluster val.szín-gel de mindig van a modellre jellemző tipikus cluster, sokféle tipikus cluster lehe

növekvő perkoláció

mag (első, kiindulási) részecske, a szomszédos üres helyek a betölthető helyek (élő helyek)

véletlenszerűen választunk egyet, - p val.színűséggel betöltjük
- $(1-p)$ -vel meghal \rightarrow örökre kizárjuk a betöltésből



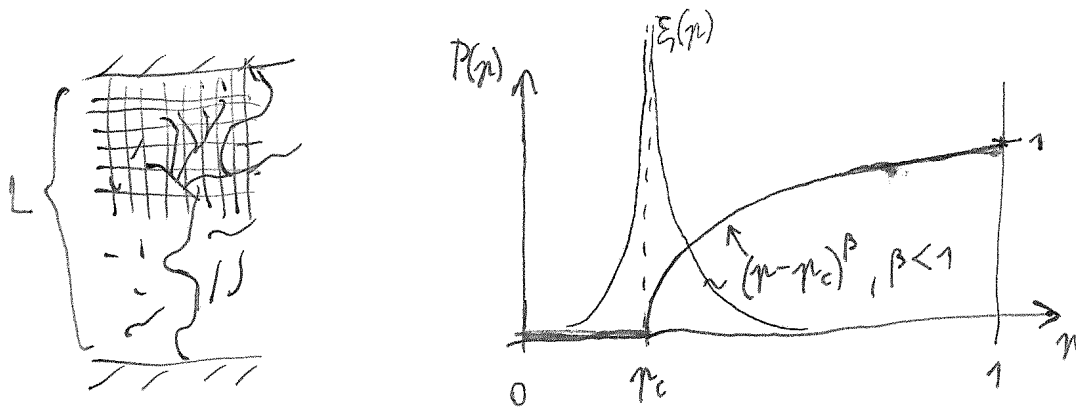
kis p : néhány lépés után leáll
 $p = 1$ mindig betöltöm \rightarrow egy paca lesz

p_1 : erdőben a fákon fertőzés terjedése

lényegében uaz., mint az egyensúlyi perkoláció: minden rácspont betöltése v. üresen hagyása, p val.szín.-gel, összes rácspontra vél.szám sorsolása a növekedés végén uaz. lesz a tipikus cluster, mint az egyensúlyinál

$P(p)$: annak a val.szín., hogy egy kiválasztott pont egy ∞ klaszterhez tartozik (ha $L \rightarrow \infty$)

lényegében uaz: mekkora a ∞ klaszter súlya? a rdsz. minden pontjának mekkora hányada tartozik hozzá?

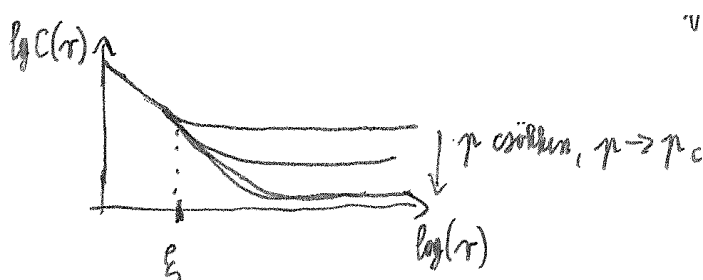


növesztett perkoláció: 1 klaszter van \rightarrow az összehasonlításához a „normál” perkolációnál meg kell szabadulni a többi klasztertől folyt. fázisátalakuláshoz hasonló

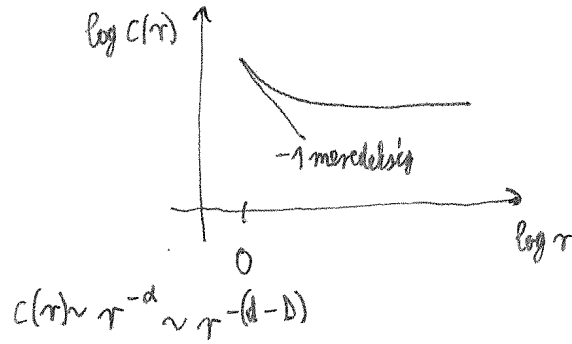
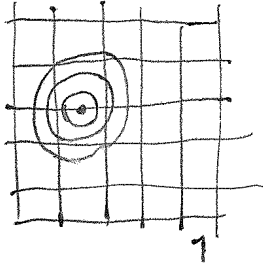
- korrelációs hossz, a legnagyobb perkolációs klaszterre

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

ξ -nél a korr. fgv. hatványfgv.-szerű lecsengése átmegy konstansba a ∞ klaszter p_c -nél fraktál,
 $p > p_c$ -re már nem, mert van véges területe is kis tartományon \sim fraktál, nagy tartományon \sim homogén, van egy átlagos sűrűsége



pl: négyzetrácsos korrelációs függvénye (élek + rácspontok)



négyzetrács: kis skálán \sim vonal $\rightarrow D = 1$
 nagy skálán \sim sík $\rightarrow D = 2$

a: rácsállandó

feltételek: $\xi \gg a$, $r \gg a \Rightarrow C(r)$ csak ξ -től (és r -től) függhet, a -tól nem

$C(r) \sim P(r) \cdot f(r/\xi)$ alakú \leftarrow önhasonlóság, skálázás

$f(x)$: skálafgv., $f(x) \rightarrow \text{const}$, ha $x \rightarrow \infty$

$x \ll 1$: $C(r)$ független ξ -től $\Rightarrow f(x) \sim x^{-\beta/\nu_p}$
 mert: $r - r_c \sim \xi^{-1/\nu_p}$ és $P(r) \sim (r - r_c)^\beta \sim \xi^{-\beta/\nu_p}$ } \Rightarrow

$\Rightarrow C(r) \sim r^{-\beta/\nu_p}$ $r \ll \xi - r_c$

fraktál. dim.: $D = d - \alpha = d - \frac{\beta}{\nu_p}$

2D egyensúlyi perkolációs klaszterre ez egzaktul ismert:

$$\nu_p = \frac{4}{3}, \quad \beta = \frac{5}{36}, \quad r_c \text{-nél } D = \frac{21}{48} \approx 1,896$$

Inváziós perkoláció

folyadék porózus közegben (pl: szivacs) modellezésére

i, véletlen számokat (0-1 között) előre kisorsolunk egy rács pontjain

ii, van egy kiinduló részecske v. felület

iii, a legkisebb véletlen számmal rendelkező hatáspontot betöltjük

nagy számú pont \rightarrow ált. betöltetlen marad nagyon sokáig,

az újonnan betöltött pontok mellett

ált. lesz kisebb számú is

elindul, megáll az egyik részen, máshol növekszik,...

nem ekvivalens az egyensúlyi perkolációval, de nagyon hasonlít ahhoz
ez is fraktálhoz vezet

Véletlen bolyongás

rácson bolyong egy részecske, ennek az útját vizsgáljuk
az út 2 végpontjának átlagos távolsága:

$$\langle R_o^2(t) \rangle = R_o^2(t)$$

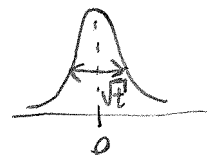
$$R_o(t) \sim t^{\nu} \quad \text{és } D = \frac{1}{\nu} \text{ a lánc fraktáldim. ja}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \leftarrow \text{diffúziós mozgásnál a térbeli kitérjedés } \sim \sqrt{t},$$

$$\langle R_e^2(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^t \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle = a^2 t + 2 \sum_{i>j} \langle \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \rangle \sim t$$

ha $i = j$

$\sum \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$
elcsúszim:



ez az önmetező bolyongás:

$$\underline{R}_e(t) = \sum_{i=1}^t \underline{a}_i, \quad \text{ahol } \underline{a}_i \text{ vektor 'a' hosszával (a = másállambó), z lehetséges irányja van (z: koordinációs szám)}$$

Önelkerülő bolyongás (TSAW = true self – awiding walks)

pl: polimerek

nem metszheti önmagát → zsákutcába kerülhet

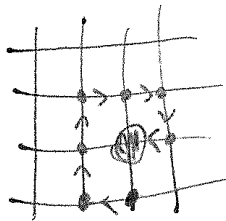
1. közelítésben emiatt: $i \rightarrow j$ (szomszédos) ugrás val.szín.-e :

$$p_{ij} = \frac{e^{-g_{ij} n_k}}{\sum_{k=1}^z e^{-g_{ik} n_k}}$$

g_{ij} : paraméter, mennyire nem metszi magát

n_k : ahányszor a k rácsponton már jártunk

preferálja az önelkerülést, leginkább $g_{ij} \rightarrow \infty$ esetén,
de még ekkor is metszheti önmagát, pl:



ebből a csapdából ki tud jönni

$t \rightarrow \infty$: úgy viselkedik, mint az önmetsző bolyongás

Növekvő önelkerülő bolyongás (GSAW = growing SAW)

polimer láncok növekedésének modellje

n szabad szomszéd $\rightarrow p = \frac{1}{n}$ val.szín-gel kiválaszt egy betöltetlen szomszédos rácspontot, azt betölti ha csapdába esik, leáll

megoldás: a csapdát előre felismeri és elkerüli (IGSAW = indefinitely GSAW)

ehhez elég csak egy kis környezetet vizsgálni
 leírjuk, hogy hányszor fordultunk balra (n_l) és jobbra (n_r)
 $n_l - n_r =$ feltekeredési szám,

ez és a lokális konfiguráció elég a csapdák elkerüléséhez

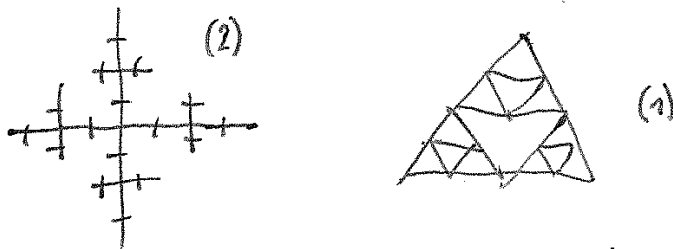
enne $D = \frac{7}{4} = 1,75$

↑

IGSAW megfeleltethető egy perkolációs klaszter peremén (vele rácspontok, kívül kell maradni) való bolyongásnak perem soha nem esik csapdába

Bolyongás fraktálon

(ált. csak önmetszőt vizsgálnak)



hurokmentes és hurkos fraktálon más a terjedése

$$R_o^2(t) \sim t^{2/d_w}$$

megj.: $R_o^2(t) \sim t$, \forall egész dimenzióban \sqrt{t} -vel megy a diffúzió

d_w exponens a fraktál szerkezetétől függ, ált. $d_w > 2$

$t \sim R_0^{d_w}$, d_w fraktál. dim-hoz hasonló, a tömeg skálázását írja le, nem a pálya fraktáldim.-ja ált. $d_w > D$

pl: Sierpinski-szivőnye (1): $d_w = \frac{\ln(d+3)}{\ln 2} > \frac{\ln(d+1)}{\ln 2} = D$
 d dim.-ra

(2)-re: $d_w = D+1$

Diffúzió-limitált növekedés (nemlokális)

növekedési folyamat, *nem-lokális mezők* (pl: hőmérséklet) irányítják

tipikusan: Laplace-egy., mozgó peremfeltételekkel

$$\frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2}$$

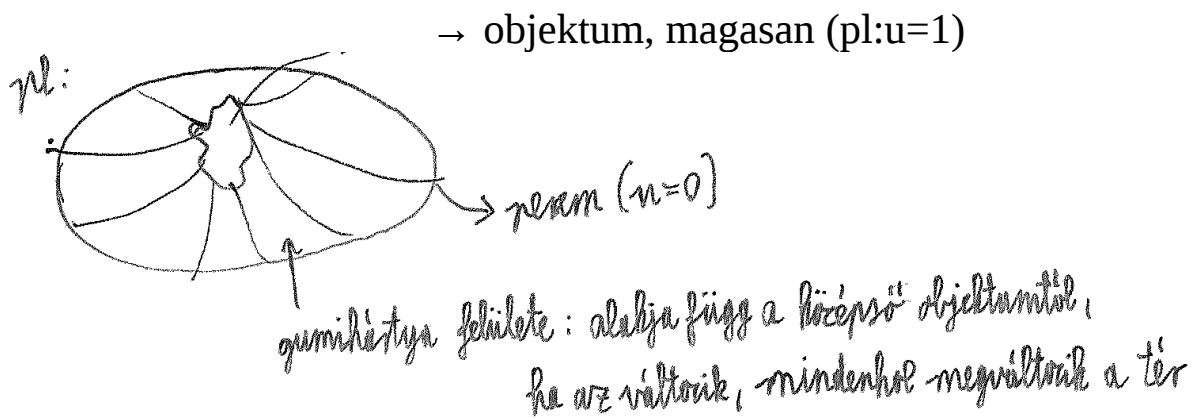
(koncentráció, hőmérséklet, elektr. potenciál,...)

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0 \quad \text{Laplace-egy.}$$

sok növekedési jelenséget ez ír le u : tér jellegű mennyiség
 megoldásai: harmonikus függvények

$\nabla u \sim$ növekedési sebesség, \sim részecske áram
 nem lokálisak a megoldások

∇u hajtja a növekedést



Diffúzió-limitált aggregáció (DLA)

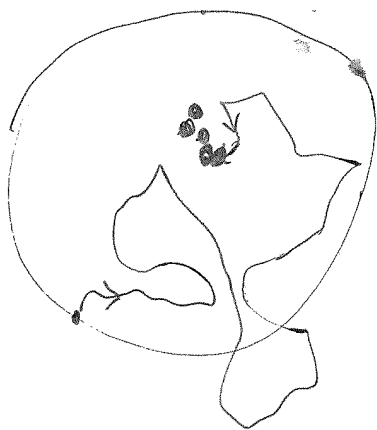
1981, Witten és Sander

pl: elektrolit, + fémionok kis koncentrációban, - elektród az elektrolitben

modell: van egy magrészecske

messziről elindítunk egy másikat, véletlenül bolyong, amikor eléri a magot, odatapad

újabb bolyongó részecske,...



végül kialakul egy plasztér: önhasznó, elágazó struktúrát hoz létre



szimulációs trükkök: - a részecskét egy. a klasztert éppen körülvevő körről indítjuk

- ha messzire kerül a körtől → kör-részecske távolságú sugarú körön véletlenül elhelyezzük
- ha nagyon messzire kerül → új részecske

- bookkeeping: rácsot teszünk a klaszter köré, V rácsponton megvan, hogy milyen messze van a fraktáltól \rightarrow akkora sugarú kör szélére tesszük véletlenszerűen

2 dim.-ban $D \approx 1.7$

korr.fgv.: $c(r) \sim r^{-\alpha} \rightarrow \alpha \approx 0,29$ ($D = d - \alpha \approx 1,71 \approx 1.7$)

magasabb dimenzióban : $d-1 < D < d$

átlagtér közelítés jóslata:

$$D = \frac{d^2 + 1}{d + 1}$$

viszonylag közel van

alsó becslés: $D > d-2$, mert:

D dim.fraktál, növekszik \setminus
 2 dim. bolyongás (másik fraktál) --- ha ez a kettő metszi egymást, csak akkor van növekedés

metszet dim.: $D_0 = D + 2 - d > 0$, hogy legyen növekedés

$$\downarrow$$

$$D > d-2$$

d	D
2	$1,71 \pm 0,02$
3	$2,53 \pm 0,06$
4	$3,31 \pm 0,10$
5	$4,20 \pm 0,16$
6	5,3

variációk: -rácson/ nem rácson növesztett DLA
alapmodell: nincs rác

egyensúlyi stat.fiz.: mindegy, hogy milyen rác v. nincs rác
másodrendű fázisátalakulásnál (← univerzalitás)

növekedésnél nem mindegy, a rác anizotrópiája miatt mást kapunk

-a bolyongó részecske p val.szín-gel tapad oda, (1-p)-vel
továbbmegy

↓
sűrűbb lesz a klaszter, több részecske jut be a „völgyekbe”
vastagabb ágai lesznek, de uaz lesz a fraktáldim.-ja, mint a

sima DLA-e

($D=1,71; d=2$ -ben)

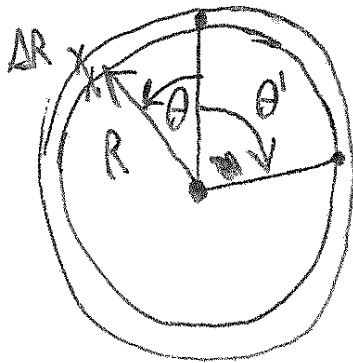
anizotrópia a DLA-ban

klaszter bentről kifele nő → sugárirány és tangenciális irány nem
ekvivalens

$$C_R(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{\theta'} S_R(\theta + \theta') S_R(\theta')$$

tangenciális sűrűségkorreláció

N: aggregátum részecskéinek száma



$S_R(\theta) = R$, R részecské van egy $R \Delta R \Delta \theta$ dobozban (R, θ) pont körül

numerikus feltétel $\Rightarrow \theta \ll 1 \text{ rad}$ $c_R(\theta) \sim \theta^{-\alpha_\perp}$, $\alpha_\perp \approx 0,41 \neq \alpha \approx 0,29$

vagyis merőleges irányban gyorsabban csökken a korreláció, mint általában a sugárirányú növekedés miatt

fh: $c(r, \varphi) \approx S_0 r^{-\alpha_\parallel} \cos^2 \varphi + S_1 r^{-\alpha_\perp} \sin^2 \varphi$ ahah a korrelációs fgv. (a teljes kor. fgv.)

$$N(a) \sim \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} c(r, \varphi) d\varphi \sim \pi a^{2-\alpha_\parallel} (S_0 + S_1 a^{\alpha_\parallel - \alpha_\perp})$$

részecskék száma egy
csökkenő járulék
a sugarú körben

$\alpha_\perp > \alpha_\parallel$ miatt ez

$$D = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln N(a)}{\ln a} = \lim_{a \rightarrow \infty} [2 - \alpha_\parallel + D_1(a)] = 2 - \alpha_\parallel$$

$$\text{ahol } D_1 = \frac{\ln \pi (S_0 + S_1 a^{\alpha_\parallel - \alpha_\perp})}{\ln a}$$

lassan csökkenő korrekció a
skalázáshoz

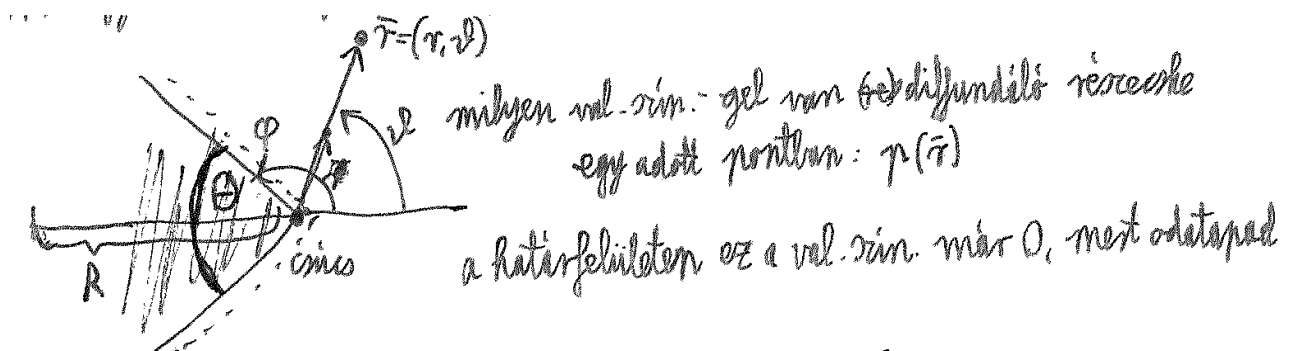
DLA elméleti megközelítése

átlagtér közelítés: $D = \frac{d^2 + 1}{d - 1}$, meglepően jól egyezik a szimulációk eredményeivel

jobb leírás: elektrosztatikus analógia



csúcsokra egy burkoló rajzolható, tfh. itt elakad minden részecske



a Laplace-egy. megoldása $\rightarrow \nabla_n$ divergál a csúcsban (csúcshatás),
hatványszerűen

↓

fraktál

$\rho(\vec{r})$ val. sim.

$\Delta \rho(\vec{r}) = 0$ Laplace-egy.

$\rho = 0$ a klaszter határán

elektrosztatika: $\rho \leftrightarrow \phi$ potenciál

$\nabla \rho(\bar{r}_0) \sim$ részecskeáram \bar{r}_0 -ban

$$\text{felület előrehaladási sebessége} = \frac{dR}{dt} = \frac{dN/dt}{dN/dR}$$

tfh. a felület egy kúp, ekörül a térerősség eloszlása (konform trf-val):

↑
a csúcs körül

$$\Phi(r, \varphi) = C r^{\pi/(2\varphi)} \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\varphi}\right)$$

C: normáló tényező

a részecskeáram λ távolságra a kúp csúcsától a kúp határa felé:

$$\nabla \Phi(\lambda, \varphi) = \frac{C\pi}{2\varphi} \lambda^{\pi/(2\varphi)-1}$$

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^R \nabla \Phi d\lambda = \dots \approx CR^{\pi/(2\varphi)}$$

$a=1$: méretet v. a diffundáló részecske mérete

$$\text{és } \frac{dR}{dt} = \int_0^R \nabla \Phi d\lambda = \dots \approx C$$

$$\Rightarrow R^{D-1} \approx \frac{dN}{dR} = \frac{dN/dt}{dR/dt} \approx R^{\pi/(2\varphi)}$$

$$N \sim R^D$$

$$\Rightarrow D = 1 + \frac{\pi}{2\varphi} = \frac{3\pi - \Theta}{2\pi - \Theta}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow D = \frac{5}{3}$$

$$\Theta \approx 108^\circ \rightarrow D \approx 1,71$$

látszik, hogy $\nabla\phi$ skálázása okozza a fraktalitást

DLA multifraktál skálázási tulajdonságai

multifraktál: a DLA klaszter növekedési sebessége egy adott pontjában

$p(r_i)$ növekedési val.szín., ennek az eloszlása multifraktál lesz

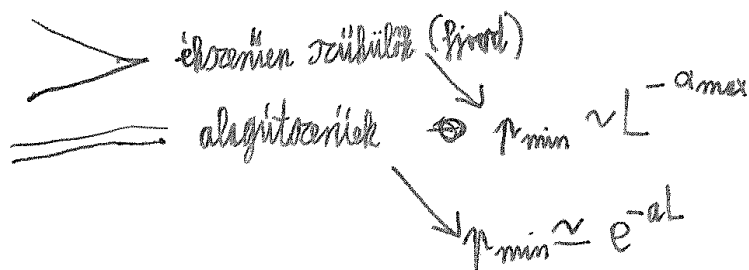
növekedési val.szín. eloszláshoz tartozó ált. dim.:

$$D_q = \lim_{l/L \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i [p_i(l/L)]^q}{\ln(l/L)}$$

$$\leftarrow \chi_q(\varepsilon) = \sum p_i^q \sim \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{(q-1)D_q}$$

hogyan változik a klaszter méretével a legkisebb növekedési sebesség (p min)?

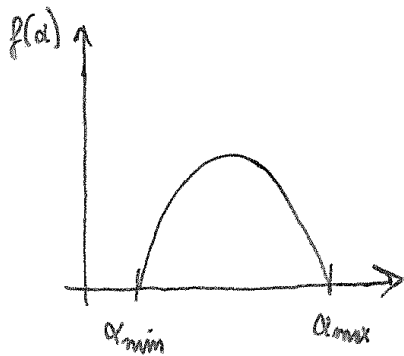
a völgyek lehetnek



3 lehetőség : $\rightarrow p_{min} \sim e^{-c(\ln L)^c}, c \approx 2$

hatványfgv.-nél gyorsabb, exp.-nál lassabb lecsengés

$$\text{ha } r_{\min} \sim L^{-\alpha_{\max}} \sim \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha_{\max}}$$

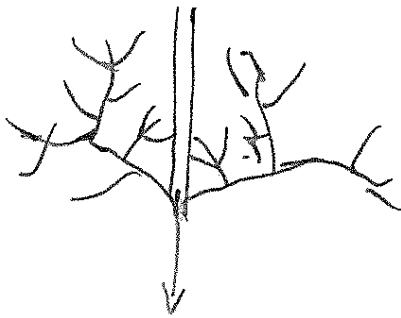


a kilógó ágak árnyékolják mögöttük levő részt

önhasonlóság → multiplikatív árnyékolás:

szorzódna

k az árnyékoló hatások



ha van benne szabad „csatorna” → exp. lecsengés

↓

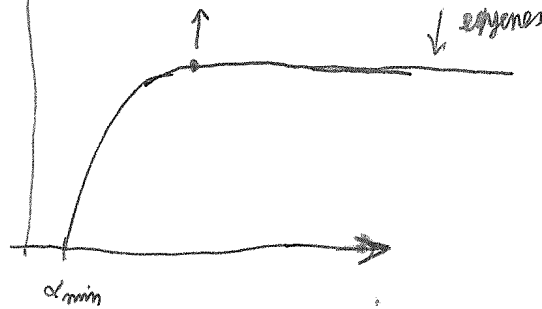
$\alpha_{\max} \rightarrow \infty$ -nek felel meg

$f(\alpha)$: minus lenne inflexió $\leftarrow D_q$ monoton csökken

↓
konkáv

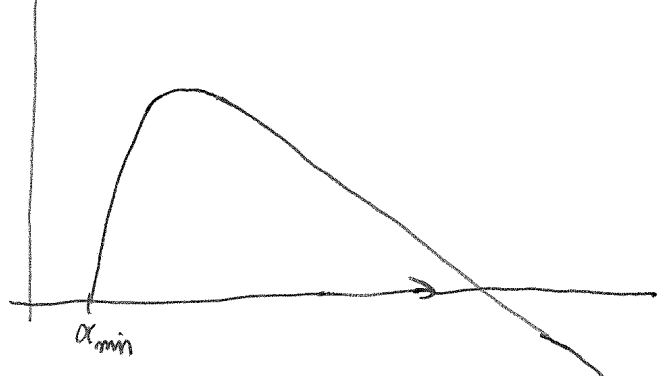
→ $f(\alpha)$

görbe-egyenes illesztés: valahampank deivált nem lesz folytonos



ha $\rho_{min} \approx e^{-\alpha_{min}}$;

$f(\alpha)$



↑

nega

tív fraktáldimenzió!

Diffúzió-limitált ülepedés

növekedés egy felület mentén indul meg



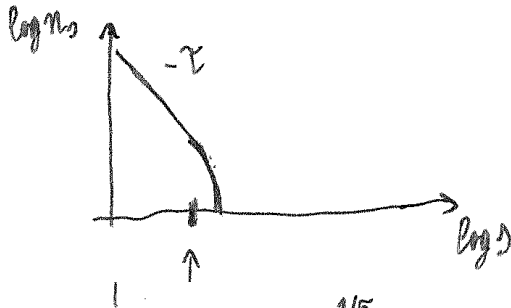
egy klaszter le tudja árnyékolni a szomszédját is
aggregátumok sokasága megjelenik, ezen belül klaszterek
méreteloszlása:

$n_s(N)$ (normált)

$L, N_t/L, n_{s,t}/L$

skalárizálás: $n_s(N) \sim \delta^{-\tau} \cdot f\left(\frac{\delta^{\sigma}}{N}\right)$, ahol $f(x)$ levég, $f(x) \sim 1$ ha $x \ll 1$ és $f(x) \sim 0$ ha $x \gg 1$
 $\delta \gg 1, N \gg 1$

N: lerakott részecskék száma egy oszlopban (N/L egységekben)



összes lerakott részecskék = \sum klaszterekben levő részecskék

levég, ahol $\delta \approx N^{1/\sigma}$

$$N = \sum_{\delta=1}^{\infty} \delta \cdot n_s(N) \sim \int \delta^{1-\tau} f(\delta^{\sigma}/N) d\delta \approx \delta^{-1} N^{(2-\tau)/\sigma} \int z^{(2-\tau-\sigma)/\sigma} f(z) dz \approx N^{(2-\tau)/\sigma} =$$

|| konst., N-től független

$\Rightarrow \frac{2-\tau}{\sigma} = 1 \Rightarrow \tau = 2 - \sigma$ skálázófüggetlenség a krit. exponensek között

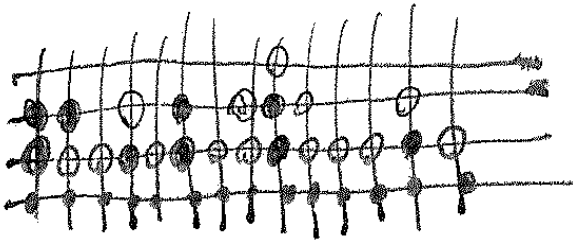
$\sigma > 0 \rightarrow 2 - \tau > 0 \rightarrow \tau < 2$ kell, hogy legyen

\rightarrow a fő járuléka az $\delta \gg 1$ klaszterekből származik

Növekvő önaffin felületek

nincs árnyékoló kölcsönhatás, és van egy kitüntetett növekedési irány
 ebben a fejezetben d a szubsztrátum dimenziója \rightarrow beágyazási dim. = $d+1$

1. Eden-modell:



minden alsó pont be van töltve, a szomszédokat lehet betölteni →

véletlenül sorsolunk egyet, azt 1 val.szín.-gel betöltjük

2. ballisztikus ülepedés: függőlegesen eső részecskék, ahol eléri a felületet, megtapad → lehetnek ahol oldalról is meg tud tapadni

kiegyenlítődés az oszlopok teteje közt, van egy burkoló kis ugrásokkal

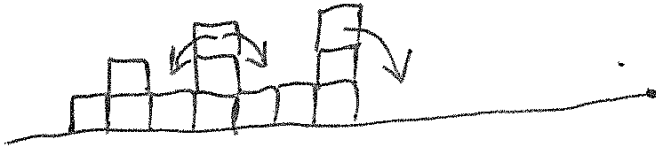


3. leesnek a részecskék, nincs k.hatás a szomszédos oszlopok között → oszlopok magassága Poisson-eloszlású lesz

$$\text{eloszlás sűrűsége} \sim \sqrt{N/L}, \quad \text{átlagos magasság} \langle h \rangle = \frac{N}{L} = \frac{t}{\tau}$$

4. felületi relaxáció

fentről leeső részecskék, de ha 1-nél nagyobb „hupli” keletkezik → leugrik



pl: 2 üveglap közé homokot szórnak

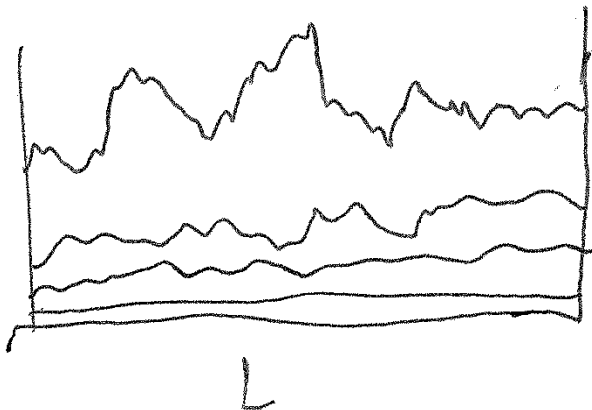
→ 2D: a felülete olyan lesz, mint a véletlen bolyongás

→ 3D: a felülete csak logaritmikusan durva, azaz gyakorlatilag sima lesz

Dinamikus skálázás

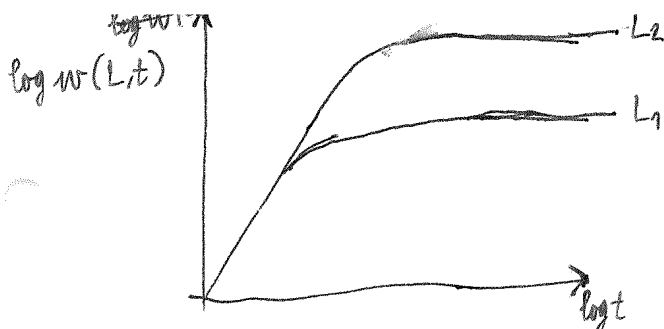
időben hogyan alakul ki a felület

$h(x,t)$ felület a burkoló



egyre durvul, hosszú idő után beáll egy stac. állapot, a felület nem durvul tovább

a felület vastagsága: $w(L,t) = \sqrt{\langle h^2(x,t) \rangle_r - \langle h(x,t) \rangle_r^2}$

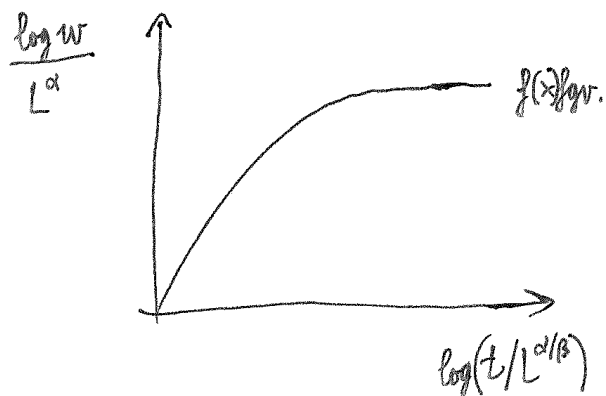


$L_2 > L_1$

$$w(L,t) = L^\alpha f(t/L^{\alpha/\beta})$$

$z = \frac{\alpha}{\beta}$ dinamikai skála exponens

önaffin fgv.-ek: $\alpha \equiv H$ $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^H$
 \downarrow
 L^α függés



$x \ll 1$: w csak t -től függ (induláskor),

2-től független

\downarrow
 kis x -re $f(x) \sim x^\beta$

nagy t -re szaturálódik a felület vastagsága

\downarrow
 $f(x) \rightarrow \text{konst.}$

vagyis: $f(x) \sim x^\beta$, ha $x \ll 1$
 $\sim \text{konst.}$, ha $x \gg 1$

alternatív leírás: magasság-magasság korrelációs fgv.:
 magasságtól való eltérés

\tilde{h} : átlagos

- iii) szubsztrátum menti eltolás
 → explicit x függés nem lehet

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \text{ ok}$$

- iv) forgatás, bal-jobb tükrözés
 → a páratlan gradiensek se szerepelhetnek
- v) fel-le szimmetria

csak egyensúlyban igaz, ekkor páros hatványok (pl: $(\nabla h)^2$) is kiesnek nem-egyensúly → kiválasztott irányok

lineáris elmélet

tfh. ∇h kicsi → magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk
 felület növekedés a lokális görbület és a véletlen tag adja meg

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 R + \eta(x,t)$$

(Edwards-Wilkinson egy.)

skálázással megoldás: mert: mego. fraktál, invariáns a skálázásra → egyenlet is inv. erre

$$x \mapsto x' = \frac{x}{b} \quad \text{és} \quad h \mapsto h' = \frac{h}{b^z} \quad \text{és} \quad t \mapsto t' = \frac{t}{b^z}$$

megj.: ez az egyenlet csak a durvulást írja le, a növekedéshez egy +v tag is kell a jobb oldalra

zaj skálázása:

$$\langle \eta(b\underline{x}, b^z t) \eta(b\underline{x}', b^z t') \rangle = 2C b^{-(d+z)} \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(t - t')$$

$$\uparrow$$

$$\delta^d(a\underline{x}) = a^{-d} \delta^d(\underline{x})$$

$$\Downarrow$$

$$h: \eta(\underline{r}, \underline{x}, b^z t) \mapsto b^{-(d+z)/2} \eta(\underline{x}, t)$$

skálázás után:

$$b^{\alpha-z} \frac{\partial h(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{\alpha-2} \nabla^2 h + b^{-(d+z)/2} \eta \quad /: b^{\alpha-z}$$

$$\frac{\partial h(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{z-2} \nabla^2 h + b^{-(d+z)/2-\alpha} \eta$$

ezeknek a tagoknak b-től függetlennek kell lenni \rightarrow

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4}, \quad z=2$$

és $d=2$ a kritikus dimenzió

(ha $d>2$; a formulák értelmetlenek)

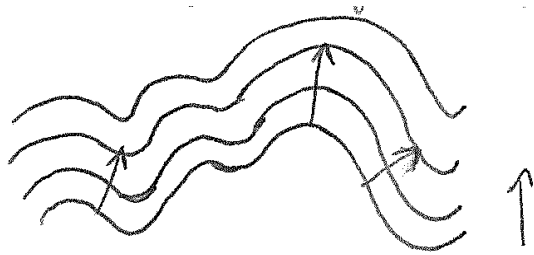
$d=2$ (síkra növesztünk) : $\alpha=0$, kvázi sima felület

Nemlineáris eset: Kadar-Parisi-Zhang (KPZ) egyenlet

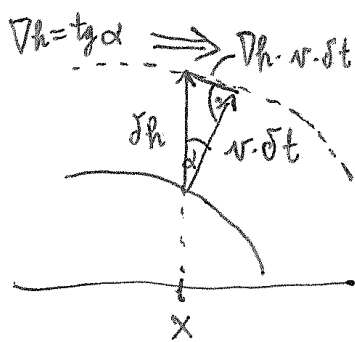
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \nu + \eta(\underline{x}, t)$$

~felületi feszültség, simít

1. nemlin.tag \rightarrow a felület oldalra is tud mozogni, ki tud szélesedni



felület mozgása: állandó sebességgel, a pillanatnyi normális irányába



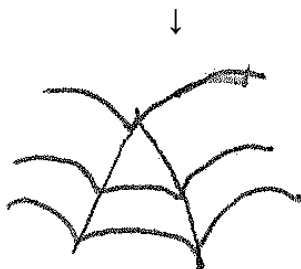
nagy skálán vizsgáljuk $\Rightarrow \nabla h \ll 1$

$$\delta h = \sqrt{(v \delta t)^2 + (v \delta t \nabla h)^2}$$

sorfejtjük ($\nabla h \ll 1$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v [1 + (\nabla h)^2]^{1/2} \approx v + \frac{v}{2} (\nabla h)^2 + \dots$$

$(\nabla h)^2$ hatása: a domboknak nő a sugara, a völgyeké csökken, élesedik de ezek az éles részek ált. összeolvadnak kisimulás



zaj: durvulást okoz

az előző egyenletnél alkalmazott skálázási módszer itt a nemlinearitás miatt nem működik

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \approx (\nabla \tilde{h})^2$$

egyenletet vizsgáljuk

$$\hookrightarrow \text{megoldás: } \tilde{h}(x,t) = t^\beta g\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

alakú legyen (g: önaffin fgv., ilyen megoldást keresünk)

behelyettesítve:

$$t^{\beta-1} g(y) - t^\beta g'(y) t^{-1/z-1} \simeq t^{2\beta} [g'(y)]^2 t^{-2/z} \quad t \ll 1-\tau$$

↓
/gyorsabban $\rightarrow 0$, mint az előző tag/

↓
 $t \rightarrow 0$: lassabban divergál, mint az előző tag

↓
mert ennek a két tagnak hasonló tempóban kell divergálnia

$$\beta - 1 = 2\beta - \frac{2}{z}$$

$$-z = \beta z - 2 \quad z = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha + z = 2$$

1 független exponens van

$d=1$: a stac. felület egy véletlen bolyongás ($H=1/2$) \rightarrow

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{3}{2}$$

felületi diffúzió

a felület alakját nagyrészt a felületi diffúzió határozza meg

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -k \nabla^2 h + \eta(x,t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla j(x,t) \quad \text{és} \quad j(x,t) = -\nabla \mu(x,t)$$

j: áram, μ : kémiai potenciál, és $\mu(x,t) \sim -\nabla^2 h(x,t)$

$$-\nabla^2 h \sim \frac{\eta}{\tau_{\text{visz}}$$

, dombokon

kevesebb szomszéd

atom van,

völgyekben több, oda

nehezebb

betenni újabb részecskét

átiskálázással:
$$\frac{\partial h}{\partial t} = k l^{z-4} \nabla^4 h + l^{(z-d-2\alpha)/2} \eta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{2}, \quad \beta = \frac{4-d}{8}, \quad z = 4$$

$\alpha > 1!$

eddig: α durvasági exponens 0 és 1 között volt

$\alpha > 1$: minél közelebb van egymáshoz 2

pont, annál nagyobb

köztük az átlagos

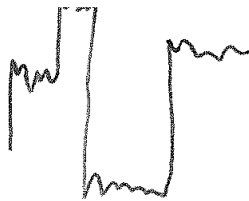
magasságkülönbség

van ilyen felület, pl:
jellemző \rightarrow vannak más

kísérletekben ez nem

tagok is a

felületi diff. mellett

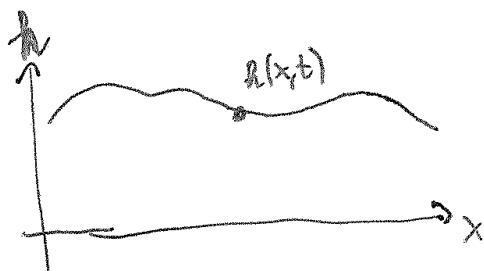


szimulációkkal egyezik,
elmélet-szimuláció ált. egyezik, kísérletek nem!
pl: nedvesítés itatósban,
baktériumtelep, tűzfront, ...
oka: a valóságban nem fehér zaj van

Növekedés véletlen közegben

a felületet érő perturbáció a felület helyétől függ:

$$\langle \eta(h, x) \eta(h', x') \rangle = \delta^d(x - x') \Delta(h - h')$$



$\Delta(h - h')$: δh távolságig ≈ 1 , utána $\rightarrow 0$
„determinisztikus” növekedés,
inhomogén közegben

helyenként lassan/gyorsan terjed

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F + \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \dots + \eta(h(x, t), x)$$

↑
húzóerő

exponensek skálamegfontolásból:

fgv.: $\langle |\Delta h| \rangle \sim \Delta x^\alpha$

mego. önaffin

η nagyságrendje
nagyságrendű kell legyen

minden tag azonos

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} \approx \frac{(\Delta R)^2}{(\Delta x)^2} \approx (\Delta x)^{-d/2}$$

$$\Delta R = \Delta x^{\frac{1}{2}(2-d/2)} = \Delta x^{(4-d)/4} \sim \Delta x^\alpha$$

$$\Delta R \Delta x^{d/2} = \Delta t = \Delta R^{1 + \frac{d}{2} \frac{4}{4-d}} = \Delta R^{\frac{4+d}{4-d}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4-d}{4}, \quad \beta = \frac{4-d}{4+d}$$

d=1: $\alpha=0,75$ és $\beta=0,6$; jól egyezik a kísérletekkel és a szimulációkkal is

Mintázatképződés

felületi feszültség
 anizotropia
 fluktuációk
 felületet hajtó erő

Egyenletek

$u(\underline{x}, t)$ dimenziótlan skalármező (pl: hőmérséklet szilárduláskor,
 nyomás folyadékok

keveredésekor, elektr.pot.,

koncentráció)

$$\nabla^2 u(\underline{x}, t) = 0$$

igaz rájuk lassú növekedésnél, változó határfelület

$$c \nabla^2 u(\underline{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

gyors növekedésnél a határfelület változásához nem relaxál elég gyorsan

felületre merőleges irányban a növekedési sebesség:

$$v_n = -C \cdot \hat{n} \cdot \nabla u$$

\hat{n} : normális egységvektor

pl: kristályosodás \rightarrow látens hő, minél gyorsabban diffundál el a hő, annál jobban tud kristályosodni

határfelt.: $\nabla u = 0$ a növekvő fázis belsejében, és $u_\infty = \text{const.}$

u értéke a növekvő felületen: $u_\Gamma = -d_0 \kappa - \beta v_n^2$
 κ : görbülete a felületnek
 v_n : felület sebessége

κ : görbülete a felületnek

v_n : felület sebessége

(és $u_\Gamma = 0$ egyensúlyban)

Mullins-Sekerka instabilitás

$$T_\infty = -1^\circ\text{C}$$

tfh. a felület egy helyen nem teljesen sima

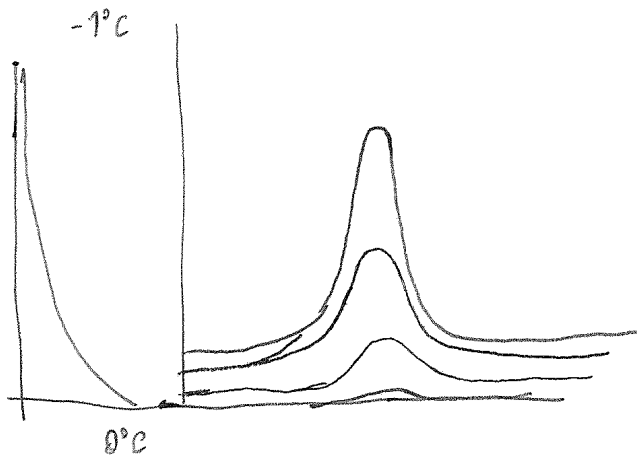


fagy

tfh. polikristályos anyag. 0°C -on



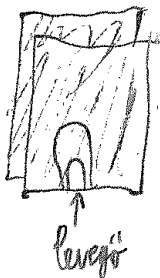
nincs anizotrópia



$u_T = -d_0 k$, $k > 0 \Rightarrow$ minél hegyesebb, annál nagyobb a görbület, annál hidegebb
 Ha elég hegyes: $u_T = -1^\circ\text{C} \Rightarrow \nabla u = 0$ lesz, megáll a hegyesedés, felvesz egy stac. alakot, így nő tovább

pl: dendrites (elágazó) kristályosodás

pl2: Züveglap között sűrű folyadék (pl:olaj), levegőt pumpálunk bele nyomásgradiens hajtja a folyadékot



itt $u_T = -d_0 k$: felületi feszültség

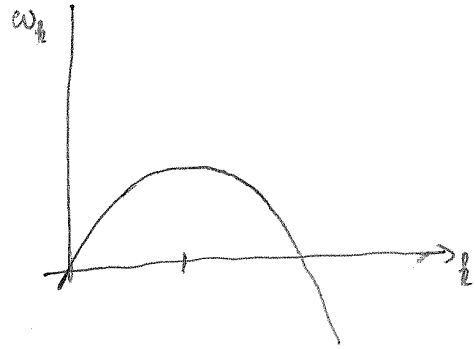
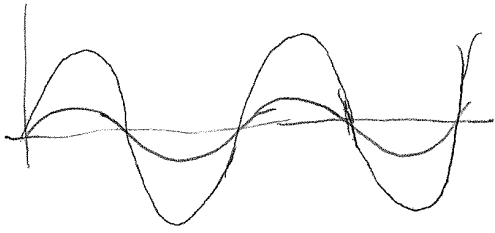
stabilitás vizsgálattal:

k hullámszámú sin perturbáció, instabil lesz ;

lin. stab. vizsg. : $e^{\omega_2 t}$ -vel ^{megy} az amplitúdó

$$\omega_2 \approx kv \left(1 - \frac{d_0 C}{\nu} k^2 \right)$$

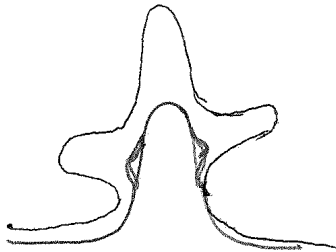
diszperziós reláció.



k nagy (λ kicsi): $\omega_k < 0$, kicsimul

$k=0$ ($\lambda \rightarrow \infty$): $\omega_k = 0$

\exists egy k , ahol ω_k max.: kb. ez jellemzi a relatív struktúrát



egy csúcs + perturbációk \rightarrow elágazás, ez ismétlődik \rightarrow komplikált, elágazó szerkezet

DLA, bolyongó részecske megtalálási valószínűség \sum rácspontban $t+1$ időben:

$$n(\underline{x}, t+1) = \frac{1}{Z} \sum_{\underline{a}} n(\underline{x} + \underline{a}, t)$$

\underline{a} : szomszédra mutató

vektorok, z db.

szomszéd

pl: négyzetrácson:

$$n(i, j, t+1) - n(i, j, t) = \frac{1}{4} [n(i-1, j, t) - 2n(i, j, t) + n(i+1, j, t) + n(i, j-1, t) - 2n(i, j, t) + n(i, j+1, t)]$$

\uparrow
 Δn rácsra

határfeltételeket is megkapjuk

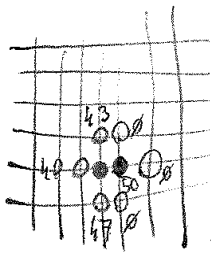
zaj-redukció DLA-ban

DLA: egy részecske mozog, esetlegesen \rightarrow véletlenszerűség, a keletkező struktúrában is

de: pl. víz kristályosodásánál szabályos, struktúrák

DLA-ból ki kell szedni a fluktuációkat
bolyongó részecske várh. értéke megfelel a Laplace-egyenletnek

módszer:

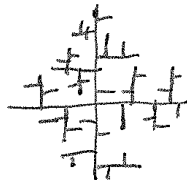


pl: $m=50$

számlálók a növekedési helyekre, +1, ha odaér egy bolyongó részecske

ha elér egy adott m -et, betöltjük, új helyekre számlálók 0-val \sim átlagolás

\rightarrow négyzetrácson:



bizonyos kristályok így

növekednek