

BIOLÓGIAI RENDSZEREK STATISZTIKUS FIZIKÁJA

- skálázás és fluktuációk az élővilágban
 - kollektív viselkedés (~ kooperatív jelenségek) : sok hasonló biológiai egység együtt másként viselkedik mint külön-külön
- skálázás: hatványfgv. szerint viselkedő mennyiség

kollektív viselkedés:

- átmenet az egységekben → globális változás (pl: hűtés → megfagy)
- fajtái: mintázat (pl: hókristály)
 - rajzás = csoportos mozgás (hal, madár, emberek, ...)
 - zaj (külső perturbáció, fehér zaj) hatására mozgás
 - hálózatok (tápláléklánc is hálózat, idegrends., fehérjék reakcióhálózata)
 - szinkronizáció (per. Viselkedés fázisa összehangolódik, pl: vastaps)

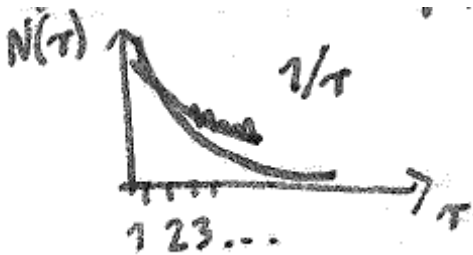
kísérlet → modell alkotás (ált. számítógépes algoritmus, v. egyenletek) szimulációk, megértés (jósolni tudunk)

Bevezető:

Fluktuációk: véletlenszerűen változó (sztochasztikus, de van benne korreláció)
Élet annyira bonyolult, hogy nem igazán determinisztikus, nagyon fontos a véletlen
pl. máshogy nézünk ki, szívritmusban is van véletlen, véletlen elektr. jelek az agyban
fluktuációk, méretek... gyakran hatványfgv. eloszlásúak

Gauss – eloszláshoz vagyunk szokva, pl: emberek max. futási sebessége
de a világcúcsok logaritmikusan változnak

Zipf-törvény: szavakat sorba rakjuk, hogy milyen gyakran használja valaki



(ranking = sorrend)

sok kölcsönható egységből álló rdsz.-ben stat. Tulajdonságok (fluktuáció, skálázás) megjelennek.

fluktuációk: 1. molekuláris biológia – fehérjemolekulák, mikroszkópikus

\ ~ 1000 vízmolekula nagyságrendű, de vizes oldatban
 10^{-10} sec alatt több 100 vízm. ütközik neki.

mikroszkópikus véletlenszerűség

2. van makroszkópikus véletlenszerűség – sok, determinisztikusan kölcsönható rendsz.

kaotikusan viselkedik, véletlenszerűnek tekinthető

2 felfogás: élet - annyira bonyolult, hogy csak stat.fiz.eszközökkel vizsgálható-ez lesz
ebben az előadásban

\
bonyolult, kaotikus, determinisztikus

3. nemlineárisan kölcsönható rdsz.-ek
mikroszkópikus zaj
sok egység → komplex viselkedés
nemlin. k.hat

Zaj, fluktuációk

fehér zaj, nem korrelált

$$C(x, t) = \langle F(x, t) \cdot F(x', t') \rangle - \langle F(x, t) \rangle \cdot \langle F(x', t') \rangle = C \cdot \delta(x-x') \delta(t-t')$$

↑ korr.fgv. ↑ zaj ampl.

Átlagtól való eltérést adja, átlag:térben, időben

fehér zaj hat a rdsz.-re → rdsz. fluktuál, fluktuáció nem feltétlen fehér, lehet korrelált

Skálázás

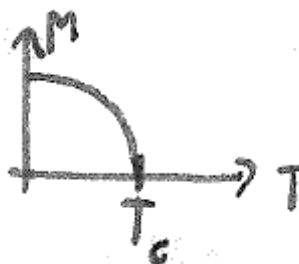
def.: $F(x)$ skálázás, ha $F' = F(A \cdot x) = g(A) \cdot F(x)$

fgv. argumentumát változtatva a fgv. Alakja megmarad, csak egy szorzóval változik ez mint fgv. egy. → csak a hatványfgv. a mego.

pl: $F = x^2 \rightarrow F' = (Ax)^2 = A^2 x^2 \checkmark$

Stat.fiz.: krit jelenségek (másodrendű fázisátalakulás) során a mennyiségk hatványfgv. szerint Változnak.

pl: h-ing-jelenség:



$$M \sim |T - T_c|^{\beta}$$

Biológiában: pl. halrajok méretének eloszlása hatványfgv.-szerű skálázás → univerzalitás (a rdsz.-ek széles családjánál uaz. a viselkedés, uezzel a hatvánnyal)

a modellben sok részlet változtatása nem változtat az univ. osztályon, vmilyen már átviszi egy másik univ. osztályba

pl: h-ing-m. 1. szomszd kh. 2. szomszéd, ... 100. szomszéd-uaz

∞ szomszédot érez → másik osztály

kritikus állapot – nagy fluktuációk, nagyon érzékeny kis környezeti behatásokra is miért van a skálázás? : $T > T_c$: rendezetlen, nincs szimmetriasértés

T_c : spontán szimm.sértés (pl. beállnak a spinek)

elsőrendű: ugrásszerű ez a változás

másodrendű: T_c -hez közeledve helyileg szimm-sértés, globálisan nincs.

(pl. mágnesnél fel, le domének, uannyi a fel, mint a le), nincs kitüntetett doménméret

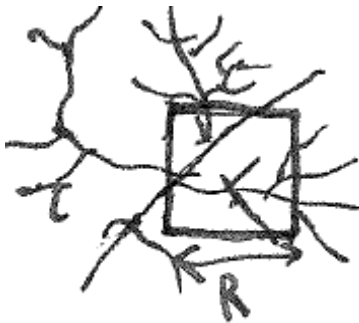
megv.: fraktálszerű struktúra – nincs kitüntetett méret, nem sérti a szimmetriát

Modellek

részecskék (=egyszerű a k.hatása a többi részecskével)

klaszterek v. aggregálódhatnak, gyakran rácsot is használunk (pl. időlépés, térbeli rács)

Fraktálgeometria



pl. fa, érhálózat,...

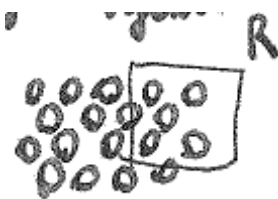
matematikailag lehet ∞ -ül finom is nem vonal, de nem tölti ki a síkot, dimenziója 1 és 2 között



vonal:

→ részecskék száma a dobozban: $N(R) \sim R^1$

Síkot egyenl.befedi:



$N(R) \sim R^2$

fraktál: $N(R) \sim R^D$ ha D jól meghatározott, tört → fraktálgeometria

ez akkor lehet, ha a növekvő tartományokba üres tartomány is egyre nő

ha J átlagos sűrűségű → 2 D objektum, lehet hogy ritka, de 2 D

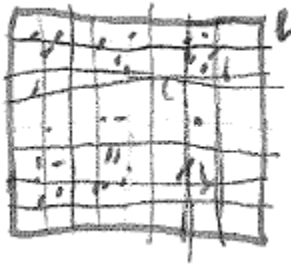
fraktál előállítás - növesztési – kis részekből összerakni

\

felosztani – véges térfogatban

D fraktáldim., d: beágyazási dimenzió, annak az euklideszi térnek a dimenziója, amibe még éppen befér.

$D < d$ és d dim. dobozokkal próbáljuk lefedni
 másik dimenziómérési módszer:



felosztás dobozokra, $l \rightarrow 0$ (l , kis méret, l)
 térfogat: $V(l) = N(l) \cdot l^d$

↓
 azon dobozok száma, amikben van része a fraktálnak

ha ez nem fraktál: $V(l) \sim l^d \cdot l^d = k$
 fraktál: $V(l) \sim l^D l^d \rightarrow D$, mivel $D < d$

ahhoz, hogy több nagyságrenden át fraktálként viselkedjen: önhasonló rendszer kell
gyakorlati def:

biológiai objektum fraktál geometriájú, ha $N(l) \sim l^D$, legalább 2 nagyságrenden át

matematikai def: $N(l) \rightarrow \infty$, ha $l \rightarrow 0$ vagy $L \rightarrow \infty$
 véges objektum, $N(l) \sim l^D$

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}$$

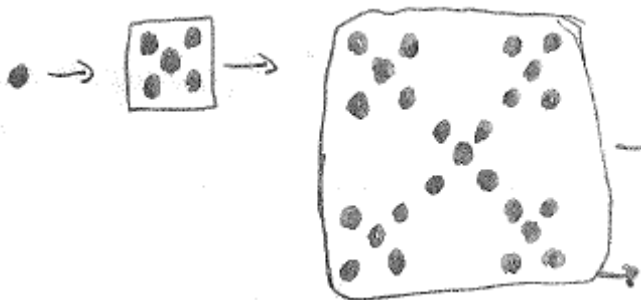
(felosztással előállított)

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln(L)}$$

növekvő objektum: $N(L) \sim L^D$

növekvő objektum L -el leosztva \rightarrow véges _ a 2 típus átvihető egymásba
 véges szorozva $L \rightarrow$ növekvő

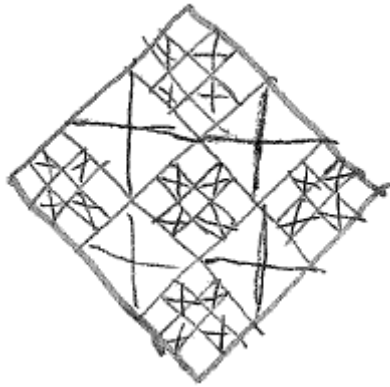
pl: növekvő



ezt az egységet hasonlóan többszörözi, stb.
 ennél a méret 3-szorosára növelésekor 5-szörösére nő a benne lévő részecskék a 9-szeres helyett

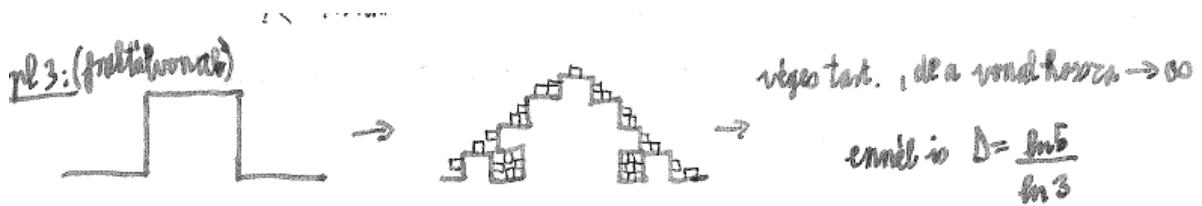
$$N \sim 5^k, L \sim 3^k \rightarrow D = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.465$$

pl: felosztás

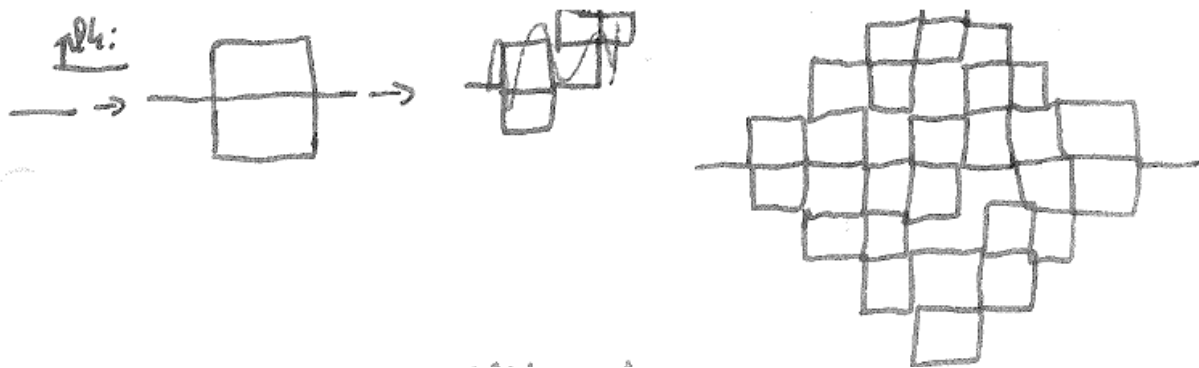


nev. a struktúra, mint az előző, uannyi a D

X= kitörölt rész



uaz lesz, mint pl2-nél



1 folyt. vonal, de $D=2$
egy adott ponthoz közelebb kerül a vonal

2D vonal, ez a Peano-görbe

fraktáldim.tul.:

a; fraktál vetülete: D_p dimenziójú, $D_p=D$, ha $D < 2$

$D > 2 \rightarrow D_p=2$, a vetület kitölti a síkot

b; 2 fraktál (A és B), D_A, D_B dim.-val, uniójukra $D=D_A$, ha $D_A > D_B$

mert a nagyobb dim.-jú tömege gyorsabban divergál, ez hat. meg a dimenziót

c; A és B fraktál metszete: $D_{AB}=D_A+D_B-d$

részecskék sűrűsége:

$$\frac{L^{D_A}}{L^d} \approx \frac{L^{D_B}}{L^d}$$

val.szín., hogy egy dobozban mindkét fraktálnak van eleme:

$$\sim \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d} \rightarrow \text{sűrűségek szorzata, mert függetlenek}$$

ezen dobozok száma: val.szín: doboz térfogat \rightarrow

$$N \sim \frac{L^{D_A} L^{D_B}}{L^d}$$

van determinisztikus és sztochasztikus fraktál

önhasonlóság: különböző skálán uaz. látszik, uaz.a mintázat ismétlődik hierarchikusan
sztochasztikus fraktálnál: korrelációs fgv. érzéketlen a skálázásra \rightarrow önhasonló
sűrűség-sűrűség korr. fgv. :

$$c(r) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}} s(\mathbf{r} + \mathbf{r}') s(\mathbf{r}'')$$

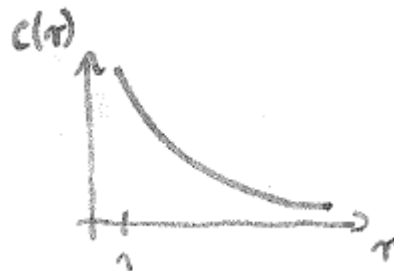
$$s(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ha a fraktálhoz tartozik különben

fraktál ált. izotróp,

$$c(r) = c(r')$$

más skálán uaz. a fgv. egy konstanssal szorás erejéig ilyenek: $c(r) \sim r^{-d}$, hatványfgv.



$N(L)$ egy gömbben:

$$N(L) \sim \int_0^L c(r) d^d r \sim L^{d-\alpha} \quad \left. \vphantom{N(L)} \right\} \Rightarrow D = d - \alpha$$

def: $N(L) \sim L^D$

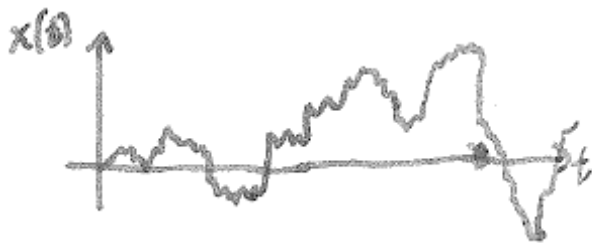
$c(r)$ megadja az anyag sűrűségét r távolságban

Önaffin fraktál

anizotróp, különböző irányokban máshogy húzzuk össze
affin transzformációra invariáns

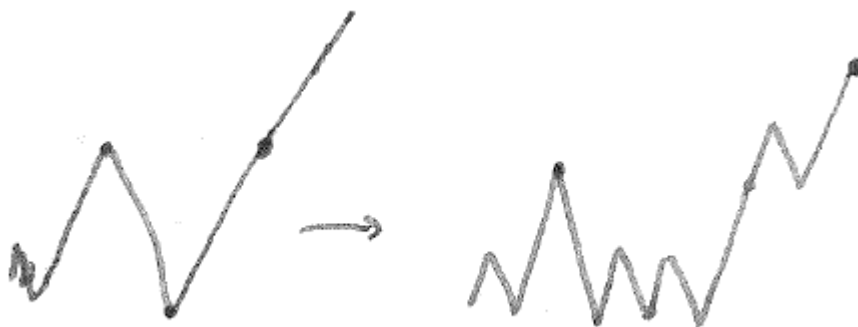
önaffin fgv.

pl: véletlenül bolyongó részecske x koord. időfüggése:



nincs benne semmi szabályszerűség \leftrightarrow nullahelyeknek fraktáeloszlása van
pl: rulett, fgv. > 0 nyer, < 0 vesz

pl2:



vízszintesen 4-edére, függ. felére kell összehúzni
V folyt., de sehol sem diff.-ható

$f(x) = x^{1/2} \rightarrow$ az origóból kiindulva önmagába megy, de más pontból nem skálázható
önaffin. V pontjából átskálázható és önhasonló

önaffin fgv. def:

$$F(x) = b^{-H} F(bx), F \text{ egyértékű, seholsem deriválható, } 1 > H > 0 \quad / \text{ azaz } x \text{ és a magasság } (F(x)) \text{ máshogy skálázódik} /$$

def2:

magasabb rendű függvény: $c(\Delta x) = \langle [F(x+\Delta x) - F(x)]^2 \rangle \sim \Delta x^{2H}$

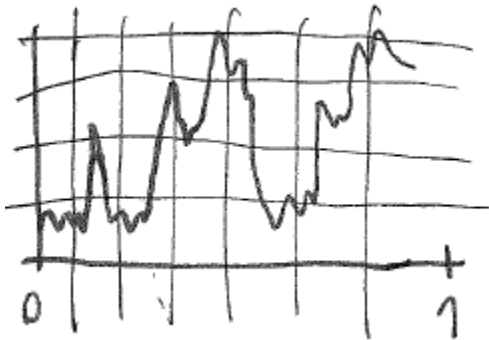
derivált: $\frac{c(\Delta x)}{\Delta x^2} \sim (F'(x))^2 \cdot \Delta x^{2-2H}$ diff. - határ függvényre

$H < 1 \Leftrightarrow$ "derivált" $\rightarrow \infty$, ha $\Delta x \rightarrow 0$

$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$

-6-

önaffin fgv. fraktáldim. mérése:



1 · 1 dobozok, hány doboz kell a fgv. lefedéséhez

$\Delta x = l$

$\langle |F(x+\Delta x) - F(x)| \rangle \sim \Delta x^H$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \sim \frac{l^H}{l}$$

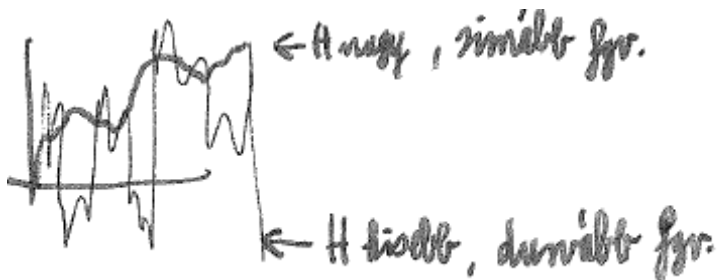
doboz egy oszlopban

dobozok száma összes oszlopban:

$$N(l) \sim \frac{l^H}{l} \cdot \frac{1}{l} \sim l^{-(2-H)} \Rightarrow D = 2 - H$$

^
|
oszlopok száma

$0 < H < 1$



Módszerek fraktáldim.meghatározására

adathalmaz → mik a fraktáltulajdonságai?

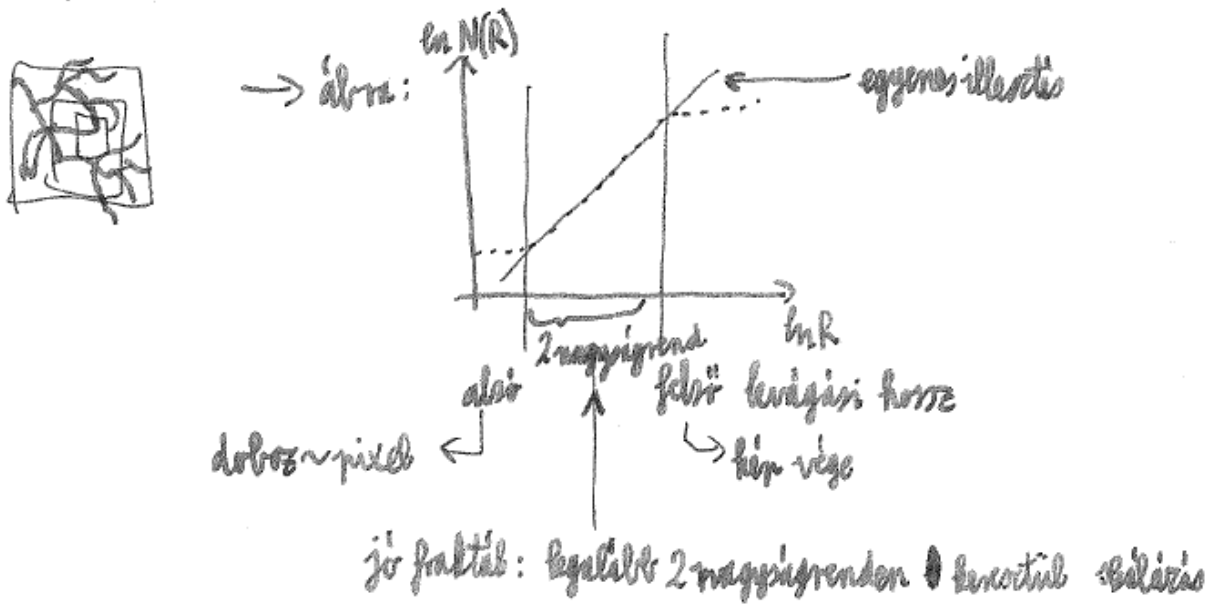
kép digitalizálás → pixelek

adatrsz. szimulációból /

sűrűségkorr. fgv.-jét hat. meg

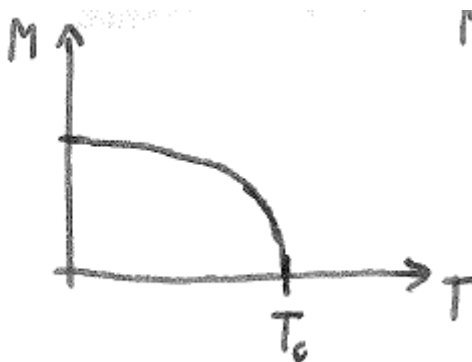
egy pont köré növekvő körök/ négyzetek, ebbe tartozó fraktál pontok száma

V pontra v. véletlenszerű választott pontokra



Skálázás folytonos fázisátalakulás során

pl: ferromágnes M: mágnesezettség (rendparaméter)



T_c körül, külső tér $H=0$,

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

redukált hőmérséklet

rendparam: $M_0 \rightarrow M$ $H=0$ mellett
 $M_0(t) \sim |t|^\beta$, $\beta > 0$, kritikus exponens
 fajhő: $\chi_{H=0}(t) \sim |t|^{-d}$, $d > 0$

/ ferrom.: komplex rdsz. alappéldája elemi mágnesek
 kollektíven viselkednek, együtt máshogy viselkednek, mint külön-külön/

szuszeptibilitás:

$$\chi(t) \sim |t|^{-\alpha}$$

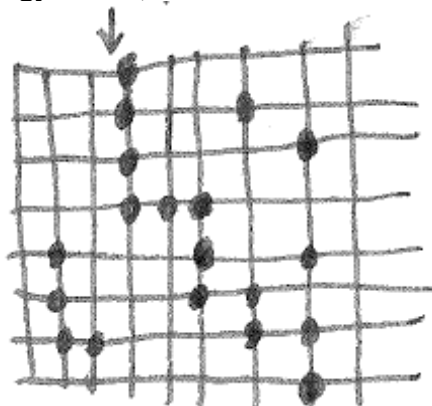
korr.fgv.lecsengése \rightarrow korr.hossz
 átlagter közelítésben megoldható

$$\xi \sim t^{-\nu}$$

krit. pontban $\xi \rightarrow \infty$

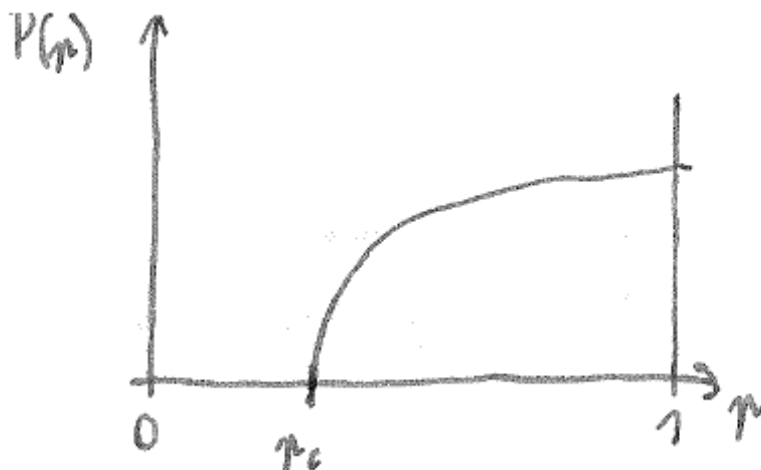
Pekoláció

(inhomogén közeg), térben véletlen viselkedés modellje
 négyzetrács, véletlenszerűen betöltött pontok \rightarrow V pontra vél.szám. r_i , ha $r_i < p \rightarrow$ betöltjük



klaszter: 2 v. több szomszédos pont
 p : 1 pont betöltési val. szín.

$\uparrow \rightarrow \infty$ klaszter, azaz mérete \sim rdsz. mérete, széltől-szélig tart



$P(p)$: ∞ klaszterhez tartozó pontok száma(tömege) ez lesz a rendparaméter

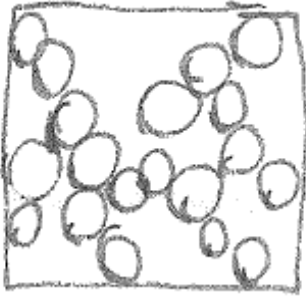
$$P(p) \sim (p - p_c)^\beta$$

p kicsi \rightarrow nincs ∞ klaszter

p_c pontban a perkolációs klaszter fraktál lesz, mert: 0 tömegű, ∞ hosszú, izotróp, nincs karakterisztikus hossza

inhomogén \leftarrow betöltött, nem betöltött pontok

pl: 2D szivárgás: megj.: korongok teljesen el tudják zárni az utat,
3 D gömbök közt át tud szivárogni



van ∞ klaszter = elzárja az utat

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu}$$

korr. hossz. = klaszterek átlagos sugara:

Önszerveződés

legprimitívebb példa. mágnesség

Heisenberg-ferrom. \rightarrow a végén minden spin egy irányba mutat, önszerveződő dolog, hogy melyik irány győz

egyensúly \rightarrow minden kiegyenlítődik



önsz. nem egyens.folyamat

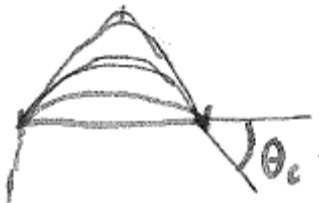
nem egyens. létrehozása: pl: folyamatosan, kis mennyiségben megy be valami (energia, tömeg,..)

lehet stac. állapot (\neq egyensúly), áramok lesznek (\leftarrow ami bemegy, ki is kell jönnie)

önszervező kritikus rdsz. (SOC = self-organized criticality)

SOC modell: homokdomb

asztalra homokot szórunk



\rightarrow kritikus szög, ha ennél meredekebb \rightarrow kis perturbáció hatására is lavinák

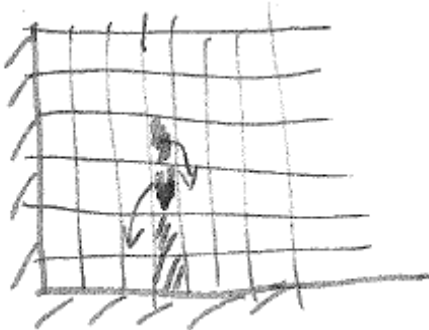
lavinák mérete változó, kicsi- óriási



θ_c : független attól, hogy hogyan szórom a homokot

spontán felvesz egy stac. állapotot, ami egyben kritikus állapot is
krit. áll.: perturbációra V felé válasz lehet (kicsi \rightarrow óriási)

1D modell



ha a magasságugrás 3 \rightarrow szomszéd oszlopokra
 \rightarrow kialakul egy felület, 2-nél kisebb ugrások
új szem \rightarrow elkezd leesni

2D rácson modell: (elfoglalt ügyintézők)

$h(\underline{r})$ diszkrét változó \sim derivált (azaz: szomszédtól vett magasságkülönbség)
v. iratok száma az ügyintézőknél

1. véletlen (x,y) pont

2. $h(x,y) := h(x,y) + 1$

3. $h(x,y) \leq 4 \rightarrow$ 1. lépés

4. $h(x,y) := h(x,y) - 4$

és $h(x',y') := h(x',y') + 1$

x',y' : szomszédok

peremen: ahol nincs szomszédja, ott leesik a homokszem

(a „domb” túlmegy a krit. értéken \rightarrow relaxál, ez kihat a szomszédra, mert van megmaradás)

5. 4. ismétlése, amíg nincs pont, ahol $h > 4$,

aztán újra 1.

1 lépési./l rácson l^2 db. új szemcse / irat véletlenszerűen érkezett

lavina mérete: hányszor ment a 4. lépés egy szemcse ledobása után

$$P(> s) \sim s^{-\tau}, \quad \tau \approx 0.25, \quad P(> s):$$

s-nél nagyobb lavinák száma

\downarrow

hatványfgv. \rightarrow vannak nagyon nagy lavinák is

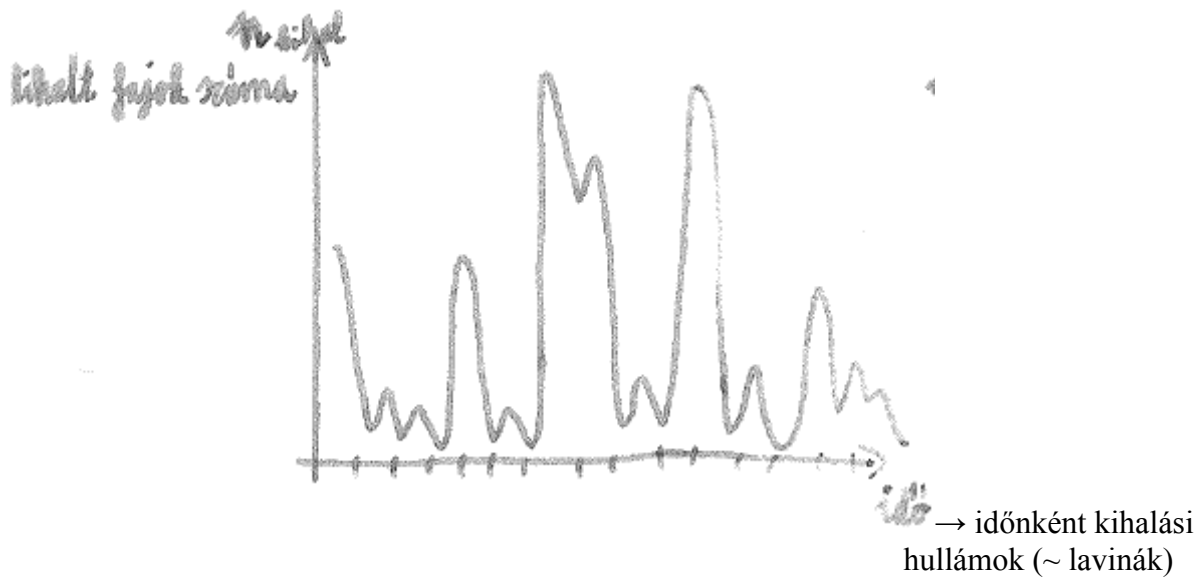
Gauss-elv lenne \rightarrow sokkal kisebb val.szín. óriás lavinákra, pl: 10^{-200} és 10^{-3}

Biológiai alkalmazása

Evolúció SOC modellje

evolúció: darwini modell: mutációval \rightarrow egyenletes változás

„punctuated equilibrium” : sokáig semmi, időnként ugrásszerűen sok új faj



→ valószínűség : $P(n_{kihal}) \sim n_{kihal}^{-(\tau-1)}$

evolúció: mutációs ráta, mutáció az, ami bejön (→nem egyens.)

mutáció → változik a faj fitnessze

fitnessz: adott genó fenotípusra, ez a szaporodási rátája a többiekhez képest,

másik def.: hogy képes reagálni a változó körülményekre a genetikai kódja

fgv.-ében

biológiai fizikában: 0 és 1 közötti szám

kis fitnesszű könnyen kipusztul a környezeti változások hatására

mutáció, szelekció → olyan modell, amiben megjelenik hirtelen sok mutáció, nagy változás

N faj V -nek J egy adott fitnessz értéke B_i (fajok ~ 1D rácson)

$$0 \leq B_i \leq 1$$

$$B_i \in \mathbb{R}, \text{ (kezdetben véletlenszámok)}$$

alacsony fitnessz → szelekciós nyomás → kihal

→ növeli a fitnesszét



1. legalacsonyabb fitnesszű faj $B_i = \min B_i \quad i = 1 \dots N$

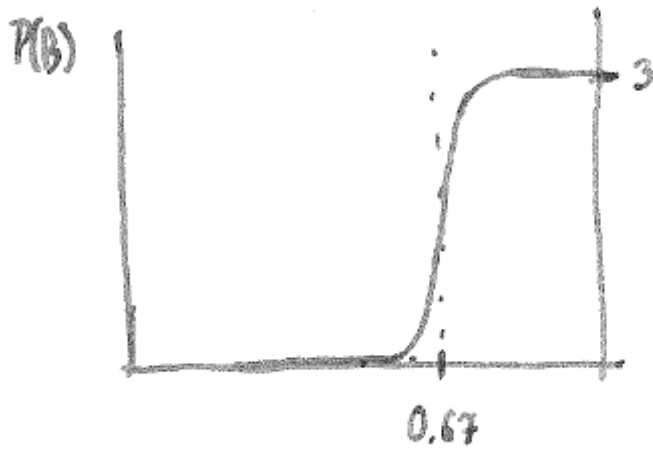
2. mutáció $B_i = \text{rnd}$ / véletlenszám lesz az új fitnessz /

3. szomszédok fitnessze is változik : $B_{j+1} = \text{rnd}, \quad B_{j-1} = \text{rnd}$

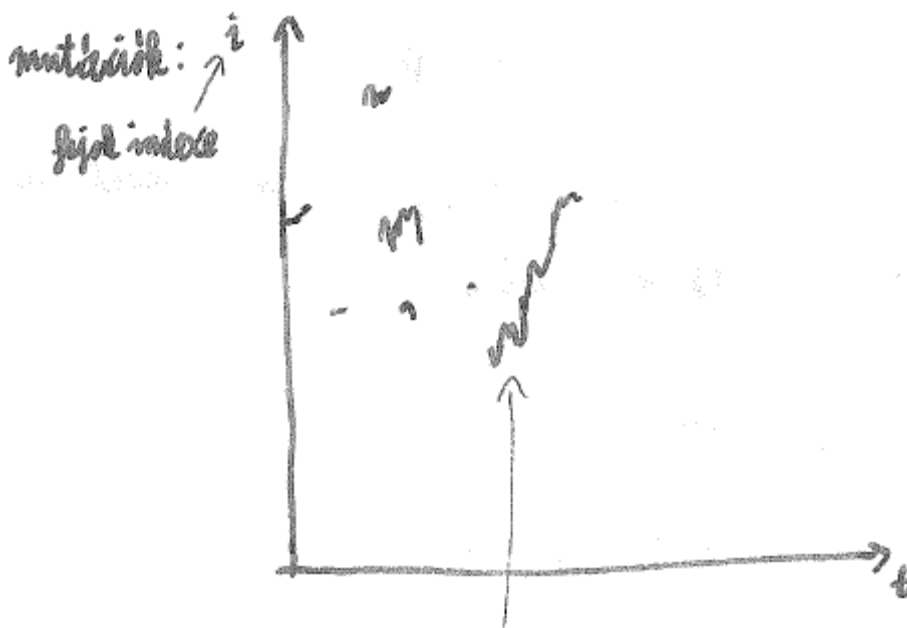
/ egy faj változik → vele kölcsönható faj is változik /

kis fitnesszű pontokból nagyobb fitnesszű lesz

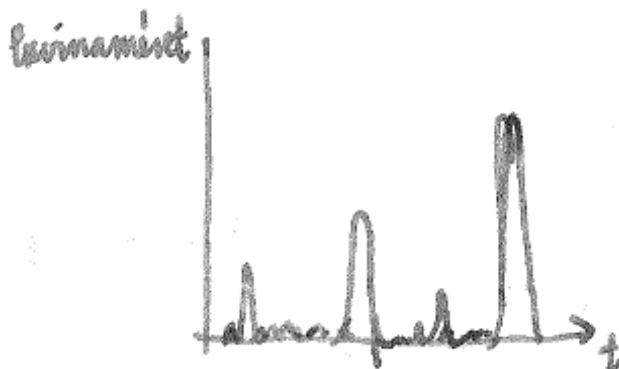
$N \gg 1$, hosszú szimuláció



önszervező módon megjelenik egy küszöb



néha egész nagy lavina, V a szomszéd v. a faj mutálódott tovább



biológiából ismert görbe kijön, ha 2 lavina közt eltelt időt máshogy (lassabban) mérjük, mint a lavinán belüli időt

lavinák méret szerinti eloszlása – hatványfgv.
ideges ügyintéző modellel analóg (nem egy az egyben megfeleltetés)

SOC a tudóműködésben

tüdő:

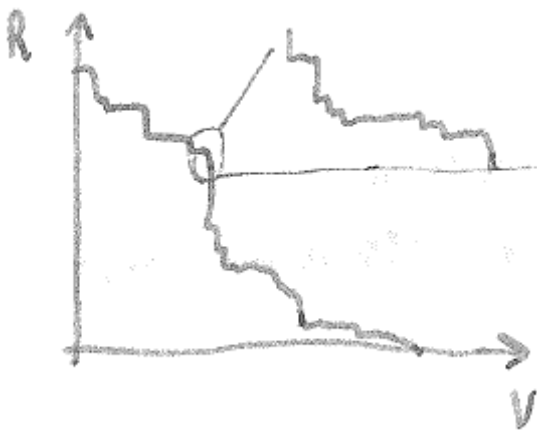


2 felé ágazik, kis ágak keresztmetszete ~ 0.5-nagy ágé



35 generáción át
utolsó 10-14 generációban van egy kis szelepszűrűség,
kritikus nyomásnál be tud menni a levegő

kísérlet: kutyatüdőbe levegőt fújnak adott sebességgel



önhasonló görbe ← lavinák, kinyit egy szelep és még utána vmennyi, aztán egy ideig ellen tud állni

R : ellenállás, mekkora nyomás kell az áll. sebességhez

V : befújít levegő térfogata

modell

$t=0$ V szelep zárt, P_E külső nyomás nő

$P_{i,j}$: ← egy adott szelep kritikus nyomása, $[0,1]$ -en egyenletes eloszlású

← oszlop

← generáció



→ ez a szerkezet: Caley-fa

mekkora lesz az első lavina? → hatványfgv. eloszlás

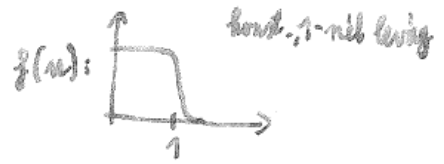
kinyitjuk az összes szelepet, amire $P_{i,j} < p$ → perkoláció a Caley-fán

Caley-fa: egyszerűen számolható, mert nincsenek benne hurkok

lavina = klaszter, amíg $P_{i,j} < p$

S: lavina mérete (nyitott szelepek száma)

lavinák méreteloszlása: $n(s) \sim s^{-\tau} f(s^{\sigma} / |p - p_c|)$
 $\tau = 3/2, \sigma = 1/2, p_c = 1/2$
 sok lavina, ha $p \sim p_c$
 kísérlet: nyomás növekedése, p_c körül lavinák
 $\int_{-\infty}^{\infty} p^{-\tau} dp = \int_{-\infty}^{\infty} s^{-\tau} ds, \tau = S^{\sigma} / |p - p_c|$
 $n(s) \sim s^{-\tau - \sigma}$



→ a felvett O_2 mennyisége p_c körül $\sim P_E^6$ (ilyen szerkezettel számolva)

lélegeztetőgép:



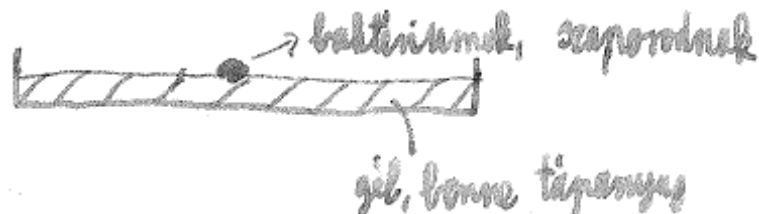
több O_2 → amplitúdó növelés, nem bírná a tüdő tartósan
 érdemes időnként megnövelni az amplitúdót → több oxigént vesz fel nagyobb p -re, mint
 amennyivel kevesebbet kisebb p -re

Baktériumtelepek

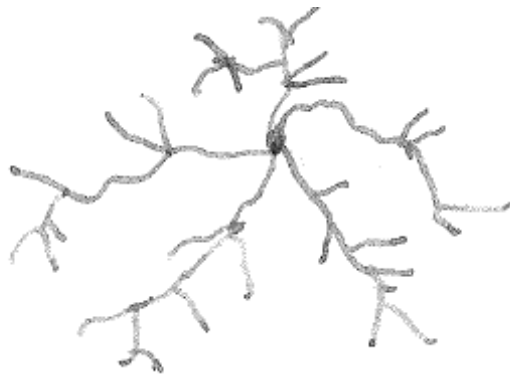
térbeli skálázás, fraktálgeometria

- baktériumok kollektív viselkedése (telep, mozgás)
- mikroszkópikus- makroszkópikus szint, önszerveződés

kísérlet: Petri-csésze



agar → kemény/ puhává teszi a gél
 sok tápanyag, kemény gél → ágas-bogas szerkezet

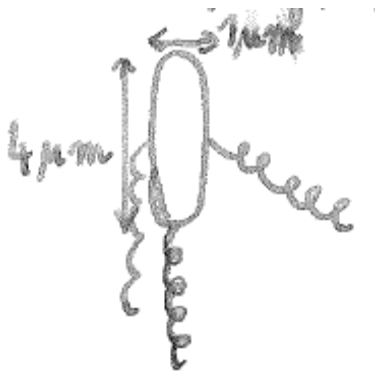


egy ág akár 1 mm vastag is lehet

ilyen alakzat: ált. diffúzió- limitált rdsz.-ben

mert: belül már nincs tápanyag, kívülről diffundál, az szaporodik,
aki a legtöbb tápanyagot kapja → a szélén van
ez a szerkezet optimalizált a tápanyag felvételére

- mikrobiológiai háttér



→ kis "ostor" / „propeller”, forgatja ← „legkisebb forgó motor”, a baktériumban van

kis méret → kis Reynolds-szám, lamináris áramlás
helikális szálak egymás mellett

→ propeller, előre tolja (run)

→ szétesnek a szálak, a baktérium forog → véletlenszerű irányváltás (tumble)

kemotaxis: mintát vesz, ha jó irányba úszik (cukor felé) később változtat irányt

Brown-mozgás

↓
biokémiája ismert



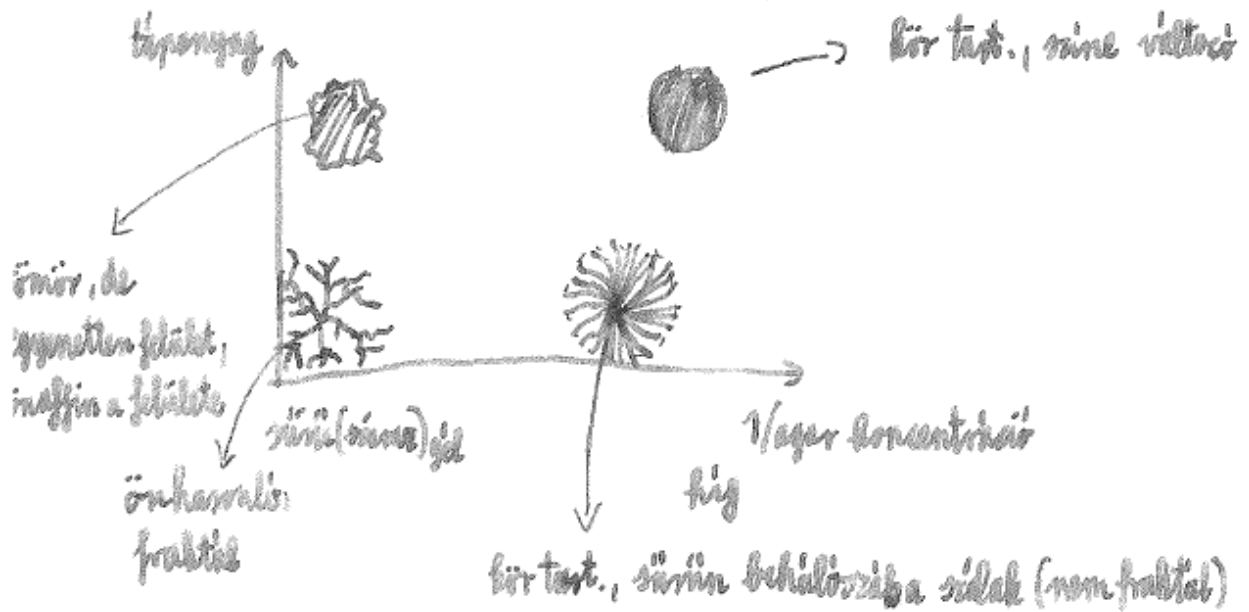
Morfológia (= alakzatok, amiket kialakítanak)

fák: az alakjukat bonyolult genetikai program határozza meg

baktérium: önszerveződen alakul ki a faszerkezet

hőmérséklet, páratart., tápanyag, gél keménysége változtatható

Morfológiai diagram: paraméterek fgv.-ében az alakzatok



van pl. spirális baktériumtelep is:



Kompakt morfológia

sok táplálék, nedves felület → tud mozogni, kvázi diffundál a felületen
kezdetben kis folt, folyik szét + szaporodik

↓ diffúzió ↓ forrástag → Fisher- Kolmogorov egyenlet:

s : baktériumsűrűség

$$\partial_t s = D_s \cdot \nabla^2 s + f(s)$$

$$\overline{d^2(t)} = 2 D_s t$$

, a baktérium átlagos távolsága az origótól

(D_s meghatározható)

$$f(s) = \tau(c) s$$

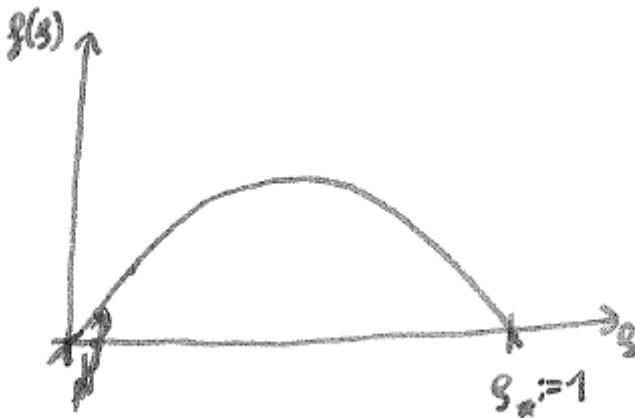
→ tápanyagtól függés,

c a tápanyag koncentráció, $r \sim c$ kis c -re

bizonyos s^* koncentráció után nincs további szaporodás



s_* -nál a növekedési ráta = 0

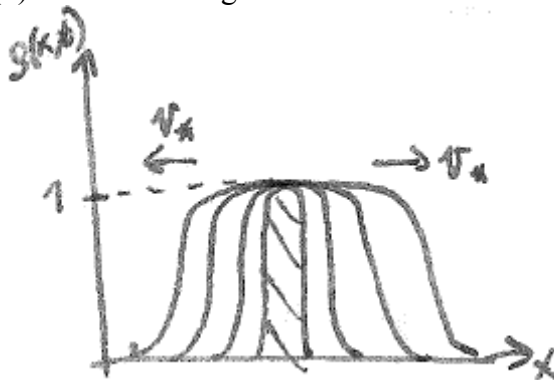


mértékegység-választás: $s_* := 1$

legegyszerűbb: logisztikus fgv., $f(s) = r s (1-s)$

(1) numerikus megoldása

ezzel az $f(s)$ -val:



$s(x,t) \sim 1$ domain

$v_* = 2\sqrt{rD_s}$ sebességgel terjed ki a baktériumtartomány

$\tilde{g}(u,t) = s(x,t)$, $u = x - v_* t$, $v_* > 0$, $g(-\infty) = 1$ és $g(\infty) = 0$

$$(1) \rightarrow \partial_t \tilde{g} = D_s \tilde{g}'' + r \tilde{g}' + f(\tilde{g})$$

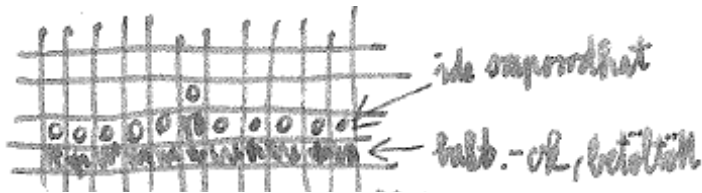
↓ analitikus mego.

ennek E stac. $v_* \geq v_* - r_*$ mego.

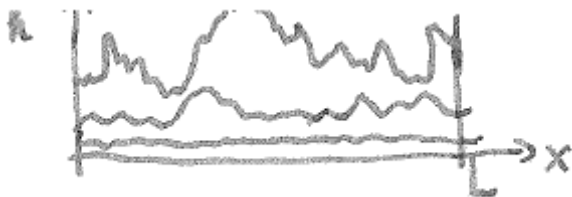
mintázatképződéses egyenleteknél gyakran, és itt is: egyenlet uazt. az alakot adja,
 több sebességnél ↔ természetben 1 sebesség
 ez a „sebesség szelekció probléma”

Önaffin felületű

bakt. nem tud úgy mozogni, nem simul ki a telep felülete → Eden modell:
 2 D rácson



véletlenszerűen választunk egy baktériumot, szaporodik, az egyik betöltetlen szomszédját betölti
 primitív modell, univerzalitás miatt sok rdsz. viselkedik így




felület durvul, önaffin (V méreetskálás durva) lesz

ezt írja le a KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) egyenlet: $h(x,t)$ a felület, ez hogyan változik

$$\partial_t h = v \partial_x^2 h + \frac{\lambda}{2} (\partial_x h)^2 + v + \eta$$

\downarrow
 ~ simítja a felületet, felületi feszültség

$\eta(x,t)$: stohasztikus tag (\leftarrow szaporodás)

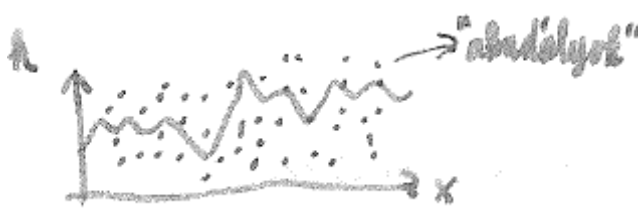

 a felület halad előre, a szaporodás átlagos üteme $\rightarrow v$, felületre h -on

$$\Delta h \approx v \Delta t \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \approx v \Delta t + \frac{v \Delta t}{2} (\partial_x h)^2$$

\uparrow $\tan \phi = \partial_x h$
 \uparrow $\tan \phi = \partial_x h$

egyéb effektusok $\rightarrow v$ helyett λ , így általánosabb az egyenlet
 ha $\eta(x,y)$ korrelálatlan fehér zaj: KPZ $\rightarrow H = 1/2$ a durvasági exponens
 de: kísérletekben $H \approx 0,7 \dots 0,8$

valóságban nem fehér, időben korrelálatlan zaj van, hanem: bizonyos helyeken nehezen halad előre a felület,
 ott megáll egy kicsit \rightarrow pl. bemélyedés
 ez a befagyott zaj, inhomogén közegben terjedés



$$\eta(x,t) = 2D \tilde{\eta}(x, h(x,t)) \quad (3)$$

$$C_{\tilde{\eta}}(x,y) = \delta(x) \delta(y)$$

korr.fgv.-nyel, azaz kis $\Delta x, \Delta y$ tartományon korrelált,
 \sim Dirac δ -k szorzata, csak J véges kiterjedése

$\Delta(x) \sim 1$ egy véges intervallumban, különben 0

$$\lambda, v, v \text{ kitérf. - helye} \rightarrow \partial_t h = \partial_x^2 h + \sqrt{v} (\partial_x h)^2 + \eta$$

D a (3)-ban lesz a param. (zaj amplitúdója), (3) zajjal:

$D > D^* \sim 1$: a felület odatűződik egy-egy akadályhoz
 akadály: nagy negatív $\eta \rightarrow h$ csökken \rightarrow lent már nagyobb $\eta \rightarrow$ a határ körül megáll
 akadály mellett előremegy, mélyülő völgy \rightarrow többi tag nő, kirántja

túlnövés nincs:



ha ilyen lenne, akkor alatta is benővi,
 hiába vannak blokkoló pontok

az ilyen felületet az összefüggő, irányított utak mentén levő blokkoló pontok tudják megállítani

pl:



ez nem tudja megállítani

irányított: nincs túlhajtás



nem irányított, túlhajtások benőnek

↓
 ezen átmegy



irányított (\sim önaffin fgv.)

a felület az ilyen lassító felületek mentén tartózkodik

irányított perkoláció: irányított összefüggő utakat keresünk

↓
 azaz irányított perkolációs klasztereket, ezek peremén áll meg a felület

$\xi_{||}, \xi_{\perp}, \xi_{||} \sim \xi_{\perp}$, létezik egy kritikus p_c ,

$$\xi_{||} \sim |p - p_c|^{-\nu_{||}} \quad \text{és} \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{-\nu_{\perp}}$$

|| párhuzamos az irányítottsággal

$$\nu_{||} = 1.733 \quad \text{és} \quad \nu_{\perp} = 1.097$$

felület vastagsága $w \sim \xi_{\perp}$, blokkolása ha $\xi_{||} = L$

$$L^H \sim \omega \approx \xi_{\perp} \sim |\rho - \rho_c|^{-\nu_{\perp}} \approx \xi_{\parallel}^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}} \approx L^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}}$$

$$|\rho - \rho_c| \sim \xi_{\parallel}^{-1/\nu_{\parallel}}$$

→ durvasági exponens

$$H = \frac{\nu_{\perp}}{\nu_{\parallel}} = 0.633$$

→ közeli van a mérési eredményekhez
 KPZ befagyott zaj és irányított perkolációs szimulációk ugyan azt az eredményt adják

Elágazó morfológia



← tápanyag

növekedés sebességét a tápanyag diffúziója határozza meg instabilitás:



véletlenül kicsit előrébb kerül a felület



táplálékhoz közelebb kerül



még gyorsabban szaporodik

ez csak egy bizonyos ideig (görbületig) tart, mert kell valamennyi szomszéd beáll egy alak, az nő



újabb perturbáció



oldalág

DLA: diffúzió-limitált aggregáció 2 dimenzióban $D_{DLA} = 1.715$ fraktáldim.

aggregációs modell:



van mag, másik részecske messze, bolyong ha odaér, odaragad másik részecske, vmelyikhez odaragad ebből fraktál klasztereket lehetett építeni, baktériumtelephez hasonló alak

bakt.-ra: bolyongás ~ táplálék mozgása
odaragad ~ szaporodik a bakt.

primitív modell: 1 bolyongó táplálékmolekula → szaporodik 1 bakt.
már ez is hasonló alakzatokat állít elő (← univerzalitás)

modell finomítása: baktériumokról felteszünk vmilyen viselkedést, k.hatást
1 bakt. – 1 részecske
V részecskéhez x_i hely és E_i (sejtciklus állapot ~ energia), nem tudnak mozogni

i.), E_i változása → spóraállapot (nincs tápl., amíg újra lesz tápl.)

↓
osztódás

$E_i < 0 \rightarrow$ spóra, $E_i > 1 \rightarrow$ osztódás és

csökkenen ← elhasználja az energiát

$$\frac{dE_i}{dt} = k \omega_i - \varepsilon$$

ω_i táplálék, ebből energiát nyer

ii.), tápl. felvétel max. sebessége

$$g(x_i) \omega_i = \min[\omega_{max} \check{g}(x_i), \omega_0 c(x_i)]$$

jelenlevő táplálék mennyisége

\check{g}

: lokális sejtsűrűség
c: táplálék koncentráció

iii.), táplálék konc. változása:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_0 \cdot \nabla^2 c - \underbrace{\sum_i \omega_i \delta(x-x_i)}_{\text{- diffúziós egyenlet}}$$

táplálékot

nyelők: az x_i pontban lévő ω_i tempóval fogyasztja a

$\omega_{\max} = 1$ esetén jól egyezik a kísérletekkel, hasonló alakzatokat ad

Mozgó baktériumok

i.,-iii., szabályok megmaradnak

ha nem mozognak – recés (önaffin) felület

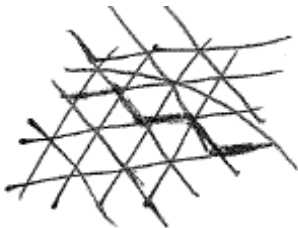
ha mozognak – sima felület

a telep maga előtt nyálkásítja, mozgásra alkalmassá teszi a felületet újabb szabályok:

iv., tfh. Brown-mozgást végeznek egy határon belül

$$\frac{dx_i}{dt} = v_0 \cdot \vec{e} \quad , \text{ ahol } \vec{e} \text{ véletlen (irányú) egységvektor}$$

v., a határ változása: számoljuk hányszor ütköznek a határnak, ha ez egy adott helyen $> N_c \rightarrow$ szomszédos cellát is elfoglalnak, azaz előretolódik a határ.



jól egyezik a kísérletekkel, de nem magyaráz meg minden tulajdonságot pl:



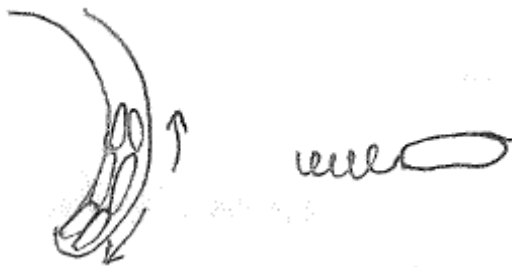
fraktál \rightarrow nem fr. Átmenet

ezek magyarázatához: kemotaxis: a baktériumok kiadnak taszító kémiai üzeneteket \rightarrow irányított Brown-mozgás

Spirális telepek

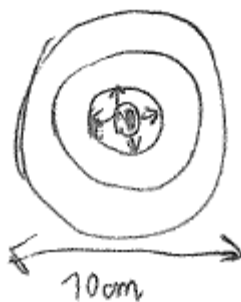


a kettő uaz. a fajta baktérium, a különbség annyi, hogy más a hosszuk



propellert forgatva halad előre – szimmetriasértés
mindegyik a csúcsnál akar előremenni, és lassan fordul (de mivel a propeller mindig azonos irányba forog, megálláskor/forduláskor is, ilyenkor a bacik is egy irányban próbálnak fordulni)

proteus mirabilis: gyűrűs növekedés 2 óránként
szinkronizáció



Szinkronizáció

sok, periodikusan változó viselkedést mutató egység (spontán) összehangolódása
 pl: idegsejt-hálózat, szívritmus szabályozása, tücskök összehangolt ciripelése, kabócák szaporodási ciklusa, tűzlegyek villogása, lépés, légzés, vastaps, menstruációs ciklus
 közös: oszillátorok csatolódnak nemlin. kölcsönhatással
 kétféle jel: - 1., delta-szerű „tüzelés” :



-2., folytonos



Kuramoto-modell (folyt., átlagtér közelítésben)
 kölcsönhatás mentes oszillátor:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

ϕ : fázis

ω : sajátfrekv.

N db. k.ható oszillátor:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_{ij} (\phi_j - \phi_i), \quad i=0, \dots, N-1$$

$\Gamma_{ij}(\phi)$: 2π per., k.hatást leíró fgv.

átlagtér modell: mindenki mindenkivel úgy hatkölsön

$$\Gamma_{ij}(\phi) = \frac{K}{N} \sin(\phi)$$

egyszerű esetben, $i, j=0, \dots, N-1$

ha $K > 0 \rightarrow$ fáziskülönbségeket minimalizálja

ezzel:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\phi_j - \phi_i)$$

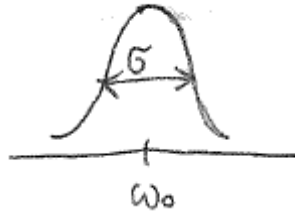
$i, j=0, 1, \dots, N-1$

tfh. w_i -k egy $g(w)$ szerinti eloszlásúak

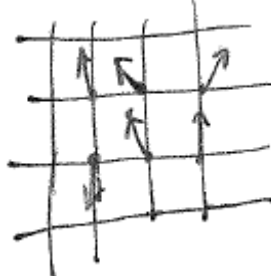
$$g(w) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(w_i - w)$$

$g(w)$: sűrűségfgv.

tfh. ez N (w_0, σ) Gauss-eloszlású, w_0 várható értékkel és σ szórással



ha $g(w) = \delta(w - w_0)$, és 2 D eset \rightarrow Kuramoto - modell = ferromágneses XY- modell



transzformáció: $\psi_i := \phi_i - \omega_0 t$, és $\omega_i \leftarrow \omega_i - \omega_0$ (ω_0 : átlagfrekv.)

erre invariáns a Kuramoto-modell

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\psi_j - \psi_i)$$

K : k.hatás erőssége

az állapotok leírhatók egy rendparaméterrel:

$$z(t) := \underbrace{Z(t)}_{\text{valós rendp.}} \underbrace{e^{i\theta(t)}}_{\text{átlagos fázis}} := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\psi_j(t)}$$

komplex rendp. valós rendp. θ : átlagos fázis

$$Z = |z|$$

$$\left(\frac{1}{N} \cdot N \cdot \underbrace{|e^{i\psi_j(t)}|}_{=1} \right)$$

$Z \approx 1$, ha ψ -k közel egyenlők
 $Z \approx 0$, ha ψ -k véletlenszerűek

$$(1) \Rightarrow \frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + K Z \sin(\theta - \psi_i)$$

formálisan egy nem k.ható, nagy oszcillátor

Kuramoto levezette: K_c -nél bifurkáció, Hopf-bifurkáció

$$K < K_c: Z=0$$

$$K > K_c: \text{ kis } \epsilon_i = \frac{(K - K_c)}{K_c} - \gamma e \quad z = \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\beta}} e^{i\theta}, \text{ ahol } \theta \text{ tetsz. konst.}$$

$$K_{c, G} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma$$

a krit. csatlás

$$\sigma = 0 \rightarrow K_c = 0$$

, mert mindenkinek uaz. a sajátfrekv.



Realisztikusabban: távolságfüggő kölcsönhatás

szimulációk rácson

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{\eta} \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i)$$

r_{ij} : i. és j. oszcillátorok távolsága

η : normálási együttható

nem kezelhető analitikusan

$\alpha = 0$: nincs távolságfüggés, átlagtér közelítést visszaadja

$\alpha \rightarrow \infty$: gyors lecsengés, csak 1. szomszéd k.hatás

K verzus α

„fizikai” α ált. $\alpha = d-1$

- ha $\alpha > d$, a csatlási tag $\forall N$ -re korlátos:

$$\left| \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^\alpha} \sin(\phi_j - \phi_i) \right| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^\alpha} < \infty$$

- ha $\alpha \leq d$ ω_i -től függően nagy N -re divergálhat a csatlási tag

$N \rightarrow \infty$, $\forall K > 0$ -ra szinkronizáció
 folytonos fázisátalakulással analóg (de a rendparam. egy kitevő)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{K \rightarrow 0^+} Z(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha \leq d \\ 0 & \text{ha } \alpha > d \end{cases}$$

a szinkronizációra való hajlam erősebb lehet, mint a Kuramoto-modellnél

Zajos oszcillátorok

fluktuációk is vannak
 azonos oszcillátorok + független fehér zaj

$$\downarrow \\ \xi_i(t)$$

minden oszcillátor ω_0 sajátfrekv.-val

$$\Psi_i = \phi_i - \omega_0 t$$

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = K \sum_{j=0}^{N-1} \sin(\Psi_j - \Psi_i) + \xi_{i2}(t)$$

csatolt Langevin- egyenletek

fehér zaj:

$$\langle \xi_{i2}(t) \rangle_t = 0, \quad \langle \xi_{i2}(t) \xi_{j2}(t') \rangle_t = 2\sigma^2 \delta(t-t') \delta_{ij}$$

erő k.hatás \rightarrow szinkronizálódhat

nagy zaj \rightarrow szétfolyik, nincs szinkronizáció

rendparaméter:

$$Z = X + iY := \frac{1}{N} \sum_i e^{i\Psi_i}$$

ezzel:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = K(-X \sin \Psi_i + Y \cos \Psi_i) + \xi_{i2}(t)$$

tfh. Z lassan változik a zajhoz képest

Fokker-Planck egyenlet a fázis valószínűség-sűrűségére:

$$\frac{\partial P(\Psi, t)}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial \Psi} [(X \sin \Psi - Y \cos \Psi) P] + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \Psi^2} \quad (7)$$

\downarrow
sztochasztikus tag okozta diffúzió

$$\text{Re } N \rightarrow \infty: Z = \int_0^{2\pi} d\psi \underbrace{P(\psi, t)} e^{i\psi}$$

ennyi oszcill. van Ψ fázissal

a sűrűségfgv. Fourier-sorban:

$$P(\psi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell} P_{\ell}(t) e^{i\ell\psi} \quad (2)$$

$Z = X + iY = P_1^x = P_{-1}$ első módus
normális $\rightarrow P_0 = 1$

(2) visszaírva (1)-be:

$$\frac{dP_{\ell}}{dt} = -\sigma^2 \ell^2 P_{\ell} + \frac{\ell K (P_{\ell-1} P_1 - P_{\ell+1} P_1^*)}{2}$$

diff. egy. rdsz.

az első 3 egyenlet:

$$\dot{P}_1 = \frac{K}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1 \quad \ell=1$$

$$\dot{P}_2 = K (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4\sigma^2 P_2 \quad \ell=2$$

$$\dot{P}_3 = \frac{3K}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9\sigma^2 P_3 \quad \ell=3$$

$P_0 = 1$ és V más $P_i = 0$ (homogén) megoldása ennek

lin. stab. vizsgálat \rightarrow az egyenlet instabil módus az első,
stabil, ha $< 2\sigma^2$

instabil, ha $K > 2\sigma^2$ ez a krit. csatolás

az átmenet körül $K \approx 2\sigma^2 \rightarrow |P_2| \sim |P_1|$ ($\ell=2$ -ből)

$$|P_3| \sim |P_1|^3$$

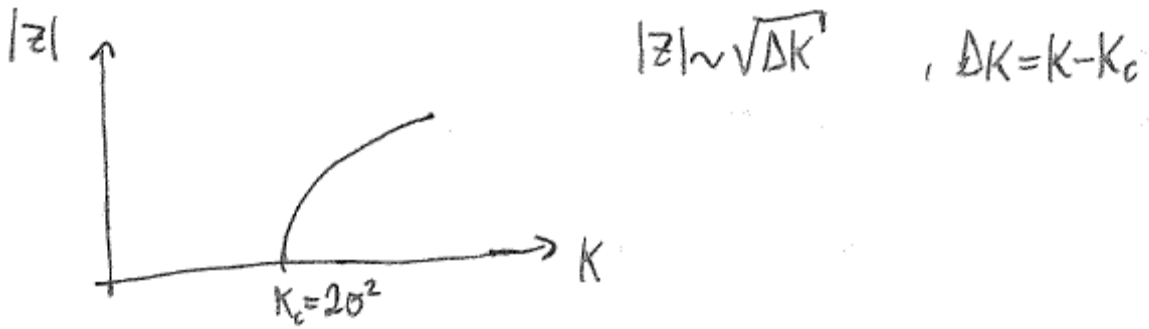
és $P_2 \approx 0, P_3 \approx 0$

P_2 lassan változik \rightarrow kifejezhető P_1 -en keresztül, és ezzel:

$$\dot{Z} = \left(\frac{K}{2} - \sigma^2\right) Z - \frac{K^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z$$

ez diff. egyenlet Hopf bifurkációra
stac. mego.:

$$|Z|^2 = (K - 2\sigma^2) \frac{4\sigma^2}{K^2}$$



Integrate-and-fire típusú oszcillátorok

def./modell:

egy oszc. v. tüzel v. fejlődik

adott oszc.-ra:

i., x állapotváltozó, monoton nő x=1 küszöbig

ii., ekkor x azonnal visszaugrik 0-ra

iii., x fejlődése: $x=f(\phi)$, ahol $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sima, monoton növekvő, konvex fgv., azaz:

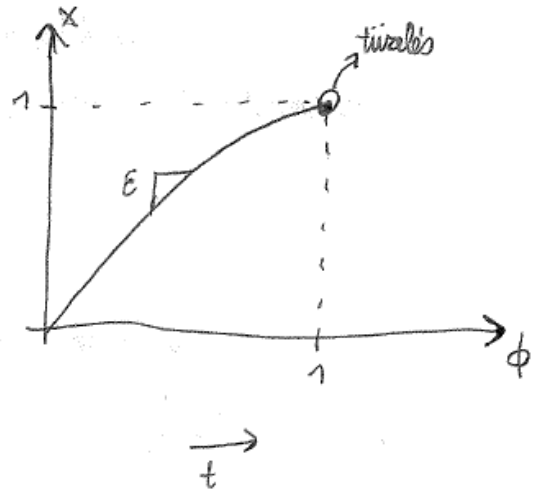
$$\frac{df}{d\phi} > 0 \text{ és } \frac{d^2f}{d\phi^2} < 0$$

$\phi \in [0,1]$ fázisváltozó, $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{T}$, T a periódusidő

és $x=0 \Leftrightarrow \phi=0$

$x=1 \Leftrightarrow \phi=1$

azaz $f(0)=0$
 $f(1)=1$

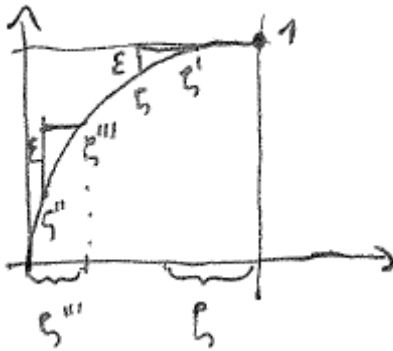


kölcsönhatás: ha egy oszc. tüzel ($x_i = 1$), a többi oszcillátort ϵ -nal növeli v. a küszöbig mozdítja

$$x_i(t)=1 \rightarrow x_j(t^+) = \min(1, x_j(t) + \epsilon) \quad \forall j \neq i$$

2 oszcillátor ($w_i = w = 1/T_i$)

a fenti feltételekkel folyamatosan szinkronizálódnak:



$\xi''' < \xi \rightarrow$ fázisok közelednek
 ξ -nal löki az épp nem tüzelő

ha kettő már szinkronizálódott, fokozatosan az összes is

Abszorpció

lavina: egy „első” tüzelés által kiváltott, „megszakítás nélküli” tüzelések sorozata
tüzelés után kell egy helyreállítódási idő \rightarrow egy adott lavinán belül tüzelő oszc. nem érzi a további tüzeléseket

δt : amíg felveszi és tüzel

Δt : amíg regenerálódik

$$\delta t \ll \Delta t \ll 1$$

szinkronizáció mechanizmus

konkáv, konvex, lim. leképezésre

ha van abszorpció és sok oszc. van, akkor V fgv.-re van szinkronizáció

sok oszc. \rightarrow a csoportok más sebességgel haladnak

beindul, ha van 2 olyan, hogy $x_{i+1} - x_i < \epsilon \rightarrow$ végül az egész rdsz. szinkronizálódik
ennek val.szín.-e Poisson-eloszlásból megbecsülhető:

$$P_n \frac{1}{N} < \epsilon$$

\rightarrow közel 1 val.szín.-gel J ilyen pár

ha m db. már szinkronizálódott, akkor a többit nagyobb sebeséggel hajtja előre, mint ahogy mozog \rightarrow a többiek utolérik

átlagtér keret: mindenki mindenkit lát

lehet lokális k.hatás is \rightarrow analóg a Kuramoto-modellel

Hálózatok

(pl: ideghálózat, tápláléklánc, öröklődés, barátság, tudományos együttműködés)

legegyszerűbb leírásuk: hálózat szerkezetét vizsgáljuk (gráfelmélet)

van növekvő hálózat

átrendeződő hálózat

belső, egyszerű szabályok alapján, önszervezően alakul ki

Erdős-Rényi modell (50-es évek)

N db csúcs, köztük élek, $N \rightarrow \infty$

2 csúcs között p_{ER} valószínűséggel van él \rightarrow véletlen hálózat

$$R_{ER} = \frac{N(N-1)}{2} \cdot p_{ER}$$

él lesz benne

előállítás: \rightarrow fizikus: végigmegy minden élen, p_{ER} v.szín-gel betölti

\rightarrow matematikus: véletlenszerűen kiválaszt $\frac{N(N-1)}{2} p_{ER}$ db. élt

ha p_{ER} kicsi: a csúcsok ált. izolált faszerkezetekhez tartoznak



klaszterek

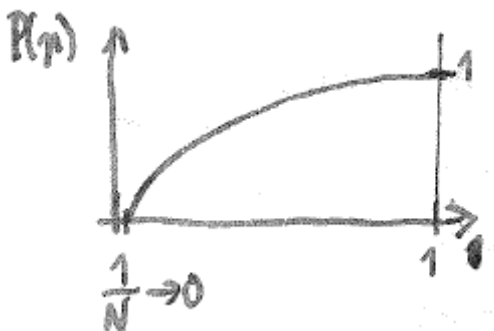
megjelenhetnek gyűrűk is

perkolációs átmenet: a legnagyobb klaszter véges súlyú

Erdős-Rényi tétel: $p_{ER} \sim 1/N$ -nél megjelenik egy véges súlyú klaszter, perkolációs átmenet átmenetnél

$$\frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{N}$$

db. él, azaz kb. $N/2$ él, ezek véges hányada mégis egy klaszterhez tartozik.



csúcs fokszáma : egy csúcsból kimenő élek száma

van irányított gráf is, most irányítatlan gráfokkal foglalkozunk

fokszámeloszlás:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p_{ER}^k (1-p_{ER})^{N-1-k}$$

↑
ennyiféleképpen helyezkedhet el a k db. él
 k db. él van betöltve az $N-1$ db. összes lehetséges ebből

átlaga: $\lambda = \bar{k} = (N-1) p_{ER}$

nagy N : az eloszlás átmegy Poisson-elő.-ba: $P(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$

gráf átmérője: $L = \langle L_{(i,j)} \rangle_{i,j}$: 2 tetsz. pont közötti legrövidebb utak (hány élen keresztül lehet eljutni) átlaga

ha ez L_{ER} , akkor L_{ER} lépésben $N \sim k^{-L_{ER}}$ pontot lehet elérni

$$\downarrow$$

$$L_{ER} \sim \ln N \sim \ln \bar{k}$$

$L_{ER} \sim \ln N$: kis világ (pl: a Földön 2 ember átlagosan 6 ismeretségi köze van egymástól, six degrees of separation)
 n növelésével L lassan változik

Kis világ modell (Watts, Strogats)

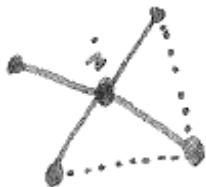
az emberek ált. a hozzájuk közel lakókat ismerik, kevesebb embert ismernek messziről
1D rács, per. határfelt., minden pont (ember) az 1. és 2. szomszédal van összekötve
 p valószínűséggel



éleket véletlenszerűen kiválaszt, töröl, helyette újabb él véletlenszerűen → ez lehet nagy ugrás

klaszterezétség

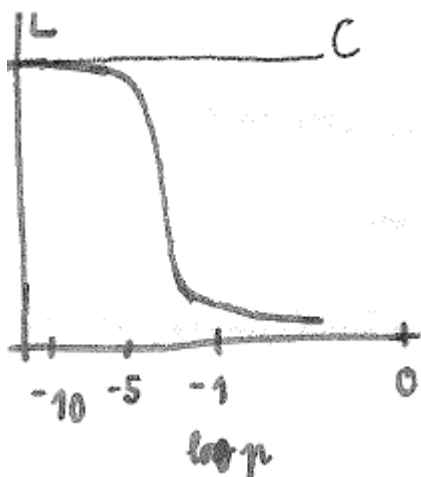
klaszter együttható C : n_i : legközelebbi szomszédok száma, l_i : kapcsolatok száma a szomszédok közt



$$C_i = \frac{l_i}{\binom{n_i}{2}} = \frac{\text{létező hurokok száma}}{\text{lehető hurokok száma}}$$

l_i : hány ismerős ismeri egymást is (.....vonalak)

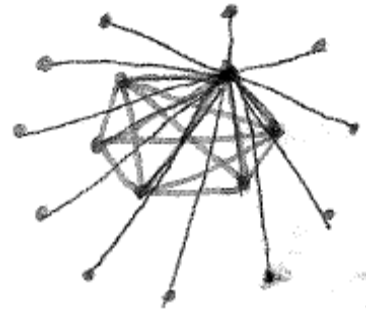
c_i : mennyire zárt az ismerősök köre



$\log p \approx 2$ -nél L levág, átmegy Erdős-Rényi féle hálózatba
 C magas marad
 ezek nem növekvő, hanem egyensúlyi hálózatok

Egyensúlyi hálózatok

topológia: melyik csúcsok vannak összekötve?, van zárt hurok?, stb.
 pl: teljes gráf (mindenki mindenkivel össze van kötve), körülötte további csúcsok üresen



átrendeződhet csillag-gráffá: minden pont egy ponttal van összekötve
 pl: üzleti kapcsolatok
 olyan hálózatok tudnak könnyen átrendeződni, ahol az élek gyorsan változnak
 ismerősök hálózata pl. nehezen rendeződik át

gráfok stst. fiz.-ja

$\{g_a\}$ irányítatlan gráfok halmaza N csomóponttal és M éllel
 perturbáció $\rightarrow T$ „hőmérséklet”: milyen erősek a perturbációk, amik átrendezik; külső fluktuáló erők

preferencia \rightarrow „energia” milyen elrendeződést preferál
 E_a

állapotösszeg:

$$Z(T) = \sum_{\{g_a\}} e^{-E_a/T}$$

élek mozgása \rightarrow egyik csúcs marad, másik ugrik - új konfiguráció g_b
 \rightarrow törlés, új él véletlenül (2 csúcs ugrik) /

$$\Delta E_{ab} = E_b - E_a$$

Metropolis-algoritmus: ha $\Delta E_{ab} < 0 \rightarrow g_b$ elfogadva (részleges egyensúlyt tudja)

különben $e^{-\Delta E_{ab}/T}$ val.szín.-gel elfogadva

$T \rightarrow \infty$: Erdős-Rényi hálózat

részletes egyensúly: $W_{ab} P_a = W_{ba} P_b$
 $W_{ab} : g_b$ ugrás val.szín., $P_a : g_a$ gyakorisága

nincsenek áramok a rendszer egyensúlyi állapotában

topológia: N_α : T_α topológiához tartozó gráfok száma, ált. sok topológiailag ekvivalens gráf van tñ. energia csak a topológiától függ: E_α

$$Z(T) = \sum_{\{t_\alpha\}} N_\alpha e^{-E_\alpha/T} =$$

$$= \sum_{\{t_\alpha\}} e^{-E_\alpha/T + \ln(N_\alpha)} = \sum_{\{t_\alpha\}} e^{-F_\alpha/T}$$

szabad energia $F_\alpha = E_\alpha - TS_\alpha$

entrópia: $S_\alpha = \ln(N_\alpha)$

TD mennyiségek (F_α, S_α) szingularitásai \leftrightarrow fázisátalakulás a topológiában

rendparaméter:

$$\phi = \phi_c = \frac{k_{max}}{M}$$

k_{max} : max. fokszám

Pl1: $E = - \sum k_i$ és $\sum k_i = M$

min. energia: $E = -M^2$, a csillagtopológia esetén (T=D-nál)
fázisátalakulás van a véletlen (Erdős-Rényi) és a csillaggráf között, éles átmenet

pl2: $E = -\sum k_i \ln k_i \rightarrow$ folytonos fázisátalakulás
motiváció: érzékelés gyakran logaritmikus skálán (pl: fény, hang)

Nem-egyensúlyi/növekedő hálózatok

kialakul, időbeli evolúciója nem átrendeződés, hanem növekedés
valódi rendszerek: növekedés és átrendeződés egyszerre, ált. különböző időskálákon

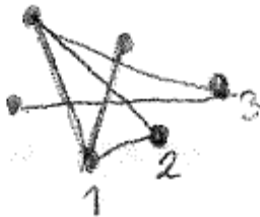
Skálamentes (scale-free) modell

tipikus hálózatokra $P(k) \sim k^{-\gamma}$, ált $2 < \gamma < 3$

Erdős-Rényi: Poisson-eloszlás → nem növekvő

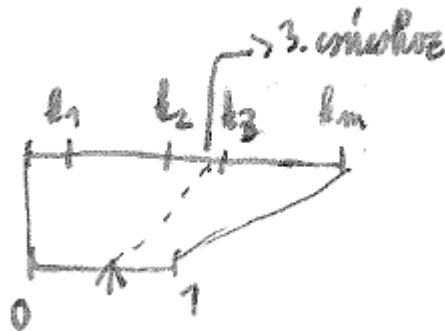
növekedés szabályai:

- új csúcs, kapcsolódásai véletlenszerűek, egy bizonyos súly szerint nagyobb preferenciával választja azokat a csúcsokat, amiknek nagy a fokszáma
- pl:-web, honlapon új linkek nagyobb eséllyel mutatnak egy nagyobb honlapra
- új gén is nagyobb val.szín.-gel működik együtt egy már fontos génnel
- kezdetben- m_0 (kicsi szám) csúcs
- új csúcs, ebből $m \leq m_0$ új él



ált. a súly~k

új él generálása adott, súllyal, úgy, hogy súlyok összege 1 (0 és 1 között generálunk egy véletlen számot, amelyik a súllyal arányos hosszúságú szakaszra esik):



i.-hez kapcsolódási valszín.:

$$\pi(l_i) = \frac{l_i}{\sum_j l_j}$$

m és m_0 csak paraméter, nem függ tőlük γ
 ebből a modelltől $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $\gamma=3$ (egzaktul megoldható)

$P(k)$ számítása:

közelítés: k folytonos, idő is folytonos → diff. egy.

i.csúcsra:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = A \cdot \pi(l_i) = A \cdot \frac{l_i}{\sum_{j=1}^{m_0+t-1} l_j}$$

(t időpillanatban)

tudjuk: $\sum k_j = 2mt \leftarrow mt$ új él, egy él 2 csúcsban növeli a fokszámot

3
 időegységenként m új él $\rightarrow A = m$
 1 időlépésben $\Delta k = m$ /

$$\Rightarrow \frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \Rightarrow \ln k = 1/2 \cdot \ln t + C \Rightarrow k_i = C \cdot t^{1/2}$$

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{0.5}$$

, ahol az i. csúcs t_i időpontban jött létre, attól kezdve gyűjti az éleket

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right)$$

t_i -k egyenletesen változnak $\rightarrow P_i(t_i) = 1/(m_0 + t)$, azaz t_i eloszlása egyenletes ezt beírva:

$$P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_i \leq \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2 (t + m_0)}$$

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \cdot \frac{1}{k^3}$$

felszámelv:

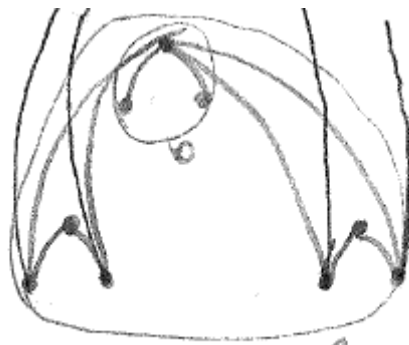
$\rightarrow \gamma = 3$, m-től függetlenül

$$\frac{1}{k^3} \text{ a } k_i \sim \sqrt{t}$$

miatt lesz

skálafüggetlen hálózat topológiájának vizsgálata:

hierarchikus hálózat:



tulajdonságai: hierarchikus

mindig a legalsókat kötjük össze a felsővel

nincs benne háromszög-hurok, azaz egy csúcs szomszédai közt nincs közvetlen kapcsolat

$c=0$ (klaszterezettség)

ha csak Δ hurkokból állna $\rightarrow c=1$ lenne

fokszámeloszlás: $N(k)=1, k=14, N(k)=2, k=6, N(k)=6, k=2,$
3 iteráció után

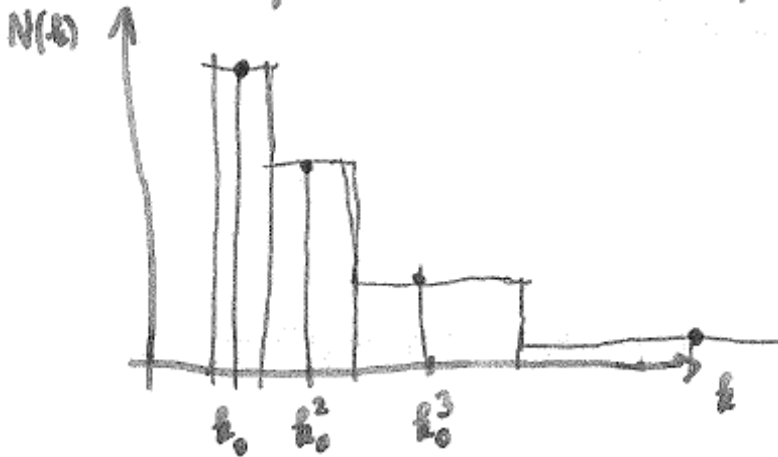
n iteráció után, ha $i=1, n$

$N(k) \sim 3^{n-i-1}$ csúcs lesz $k \sim 2^{i+1} - 2$ fokszámmal

$N(k/2) = 3N(k) \setminus$
igaz lesz a legtöbb csúcsra
tfh. $N(k) \sim k^{-\gamma}$ /

$$\Rightarrow \frac{k^{-\delta}}{2^{-\delta}} = 3k^{-\delta} \rightarrow 2^{\delta} = 3 \rightarrow \delta = \frac{\ln 3}{\ln 2}, \text{ de ez nem 2 és 3 közötti!}$$

probléma: diszkrét modell, hisztogramhoz kell egyenest illeszteni



vagyis egy.-egy érték mindig
hosszabb és hosszabb intervallumra esik
helyesen: a pontokat úgy kell rajzolni, hogy korrigálunk
a hisztogram oszlopainak szélességével

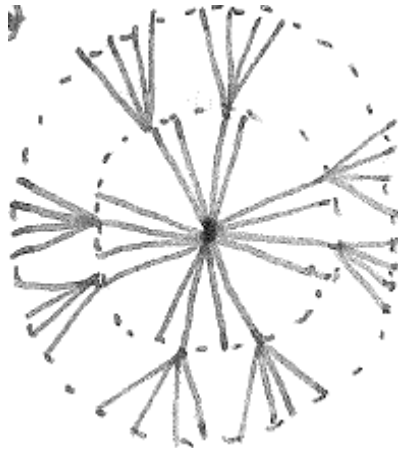
$$\delta = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

determinisztikus fa:

0., középpontból n él



1., minden él helyett n új él $\rightarrow n^2$ él lesz



(n=4)

2., minden m-edik csúcsból n új él egy külső körre
 új élek csak a legkülső körön levőkből

$$j: n^2/m$$

g iteráció után: j^0 db. n^{g+1} éllel
 j^1 db n^g
 j^g db n éllel

pl: n=4, m=2, $\rightarrow j=8$ esetben $P'(4k) = P'(k)/8$

előzőhöz hasonlóan $\gamma = \ln 8 / \ln 4 = 3/2$
 korrigálva $\gamma = 5/2$

$$\text{általában: } \gamma = 1 + \ln j / \ln n$$

lehet fluxust számolni

tfh. a legkülső éleken egységnyi fluxus megy be, a közepén jön ki

↓
v=1

fluxus: j^0	n^g db élen	a felsőbb szinteken nem minden élen van fluxus
j^1	n^{g-1} db élen	
$j^g n$ fluxus	1 élen	

ekkor $P'(8v) = P'(v)/8$ (j=8, n=4 esetén)

↓ csak j-től függ, n,m-től nem

$$P(v) \sim k^{-\alpha}, \alpha=2$$

α független γ -tól, n-től és m-től

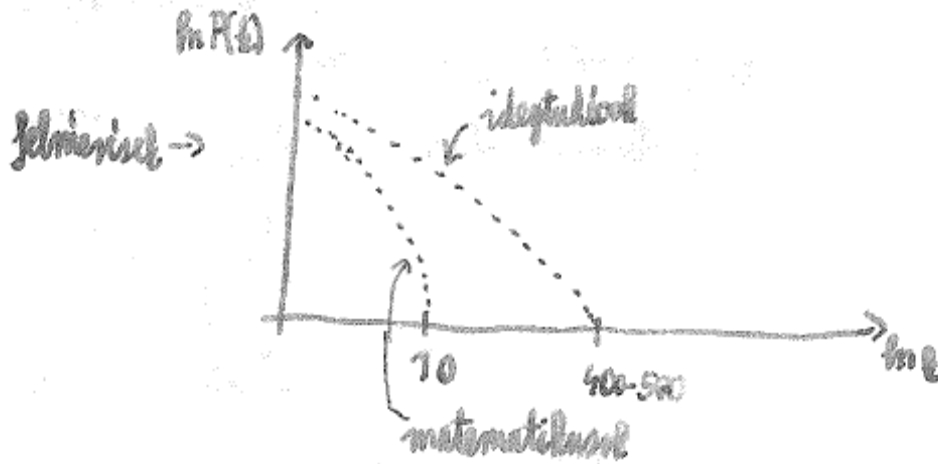
sok hálózatot vizsgálva ez univerzális, 2 osztály / $\alpha = 2$
 $\alpha = 2.2$

Együtműködések hálózata
 kutazók között

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \gamma=2..3$$

új él valsín: $\Pi(k_1, k_2)$

feltevés: $\Pi(k_1, k_2) \sim k_1 \cdot k_2$

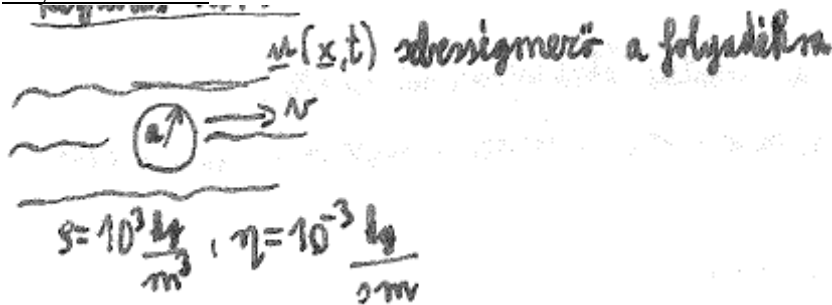


Biológiai motorok FEJEZET MÁR NEM RÉSZE A TANANYAGNAK !

Biológiai motorok

- mikroszkópikus fizika:
- Reynolds szám kicsi → túlszillapított
 - nagy hőmérséklet fluktuációk
 - zajt nem kiküszöböli, hanem felhasználja

Reynolds-szám:



Navier-Stokes egyenlet: $\rho \underline{\ddot{u}} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{u} \quad (+\underline{f})$ → pl: gravitációs erőssűrűség

átskálázás:

(dimenziótlantás)

$$\underline{x} = a \underline{x}' \quad \text{és} \quad \underline{u} = v \underline{u}'$$

$$t = \frac{a}{v} t' \quad \text{és} \quad \nabla = \frac{1}{a} \nabla'$$

$$p = \frac{\eta v}{a} p'$$

ezeket behelyettesítve:

$$-\frac{1}{a} \frac{\nabla^1 \eta v}{a} p^i = \rho \frac{du^i}{dt^1} \frac{v^2}{a} - \eta \frac{1}{a^2} \nabla^{i2} u^i v \quad / \cdot \frac{a^2}{\eta v}$$

$$-\nabla^1 p^i = \frac{\rho a v}{\eta} \frac{du^i}{dt^1} - \nabla^{i2} u^i$$

= Re, ez a Reynolds-szám, ez is dimenziótlan

↓ inerciális erők ↓ viszkózus erő



$$Re = F_{\text{inerciális}} / F_{\text{viszkózus}}$$

Re kicsi → inerciális erők elhanyagolhatók

↓
 uaz. a megoldás u^i -re v-től függetlenül

↓
 u^i -nak is ugyanazok a trajektóriái, csak $\frac{\rho a v}{\eta}$ -szeresére változik a nagysága

↓ a nyomás is $\frac{\rho a v}{\eta}$ -szerese lesz.
 szimmetrikus mozgással nem lehet úszni alacsony Re mellett

pl:  aztán  → ami víz kiment, uoda visszamegy
 összecsup lassan kinyit

alacsony Re → $F \sim v$ lesz (Stokes-törvény teljesül)

(megj.: magas Re → $F \sim v^2$)

ember úszik:

$$Re \approx \frac{10^3 \cdot 1 \cdot 1}{10^{-3}} = 10^6 \text{ nagy, } \gg 1$$

baktérium:

$$Re \approx \frac{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-5} \ll 1, \text{ kicsi}$$

kb. mintha kátrányban úsznánk,
 nem is annyira úszik, inkább fúrja előre magát

molekula mozgás:

$$Re \approx \frac{10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{10^{-3}} = 10^{-3} \ll 1, \text{ kicsi}$$

alacsony Re, meglökünk egy objektumot és hagyjuk lelassulni:

$$m \dot{v} = -\gamma v$$

↓

v exp. csökken,
ezalatt megtett út

$$\tau = \frac{m}{\gamma}$$

karakterisztikus idővel

$$\lambda \approx v_0 \cdot \tau = \frac{v_0 m}{\gamma}$$

$$\frac{\text{megtett út}}{\text{obj. mérete}} = \frac{\lambda}{a} \approx \frac{v_0 m}{a \gamma} \approx \frac{v_0 m}{a^2 \eta} \approx \frac{v_0 \rho a}{\eta} = Re$$

Stokes-törvény golyóra: $\gamma = 6\pi\eta a \approx \eta a$ obj.(pl:baktérium) kb. vízsűrűség $\rightarrow m \approx \rho a^3$

kis Re mellett Re megmondja, hogy az elengedett obj. kb. mérete hányszorosára fékeződik le
baktérium: $\sim 10^{-11}$ m alatt leáll \rightarrow túlszillapítás
vízmolekula: (követítés, Stokes-törvény nem teljesen igaz rá)

$$\gamma = 6\pi \cdot 10^{-3} \cdot 1.4 \cdot 10^{-20} = 3 \cdot 10^{-12}$$

$$\tau_{\text{víz}} = \frac{m_{\text{víz}}}{\gamma_{\text{víz}}} = \frac{18 \cdot 10^{-27} / 6 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-12}} = 10^{-14} \text{ s}$$

kb. ilyen ütemben „rugdosák” a vízmolekulák
a vízben levő objektumot

obj. a vízben, zajt is figyelembe véve:

$$m \ddot{x} = -\gamma \dot{x} + \gamma \sqrt{2D} \xi + F$$

↑ ↑
fehér zaj, külső erők
a vízmolekulák rugdosása miatt

Langevin-egyenlet

ξ : ha 10^{-14} s-nál nagyobb időskálán nézzük, jó közelítés a fehér zaj

fehér zaj: $\langle \xi(t) \rangle = 0$

$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta(t-t') \delta_{ij}$ /különböző irányok és a különböző időpontok korrelálatlanok/

(megj.: szimuláció során $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta_{t,t'} \cdot 1/\Delta t$ azaz δ -korrelált)

↓ ↓
zaj amplitúdója $\sim 1/\sqrt{\Delta t}$ $\sim \delta(t-t')$, integrálja 1 kell legyen

túlszillapított \rightarrow inerciális tag $m \ddot{x}$ elhanyagolható, obj. 10^{-14} s skálán felgyorsul/lelassul

↓

$$\dot{x} = \frac{1}{\gamma} F + \sqrt{2D} \xi$$

sztochasztikus diff. egy.

↓
Fokker-Planck egyenlet

$P(x,t)$ = sűrűségfv.-re

$P(x,t) \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ = val. szín., hogy x,t körüli $\Delta x \Delta t$ intervallumban van az objektum

$$(1) \dot{P}(x,t) = -\nabla \cdot j(x,t)$$

kontinuitási törvénynek igaznak kell lenni, mert az objektumok nem tűnnek el

$$(2) j = \frac{F}{\gamma} P - D \nabla P$$

j : val. szín. sűrűség árama

↑
külső erőből

↑
zajból származó tag

zaj tag levezetése diszkretizált esetben:



Δt idő után p val. szín.-gel jobbra, p -vel balra ugrik

Langevin-egyenlet: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{2D} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \xi$

↳ $\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t} - t$ teljesít és δ -korrelált

$\langle \Delta x^2 \rangle = 2D \frac{1}{\Delta t} \Delta t^2$

p val. szín.-gel jobbra, balra ugráló objektumra:
 $\langle \Delta x^2 \rangle = \delta^2 \cdot p + \delta^2 \cdot p + 0 \cdot (1-2p) = 2\delta^2 p = 2D\Delta t$

↓
 $p = \frac{D\Delta t}{\delta^2}$ ez legyen < 0.5

a val.szín. megváltozása i helyen:

$$\Delta P(i) = -2p P(i) + p P(i-1) + p P(i+1) \stackrel{\downarrow}{=} D \cdot \Delta t \cdot \frac{P(i+1) + P(i-1) - 2P(i)}{\delta^2}$$

↓
diszkrét 2. derivált

$$P = D \cdot P'' \rightarrow \underline{j} = -D \cdot P'$$

máshogy felírva:

$$\underline{j} = -D e^{-\frac{V}{D\delta}} \nabla \left(e^{\frac{V}{D\delta}} P \right) \quad \text{és} \quad F = -\nabla V$$

(V potenciál)

uaz., mint (2)

egyensúlyi eloszlás: egyensúlyban $P=0$, $\underline{j}=0$

$$\downarrow$$

$$P_{eq} = P_0 e^{-\frac{V}{D\delta}}$$

$$\text{stat. fiz.:} \rightarrow P_{eq} = P_0 e^{-\frac{V}{k_B T}}$$

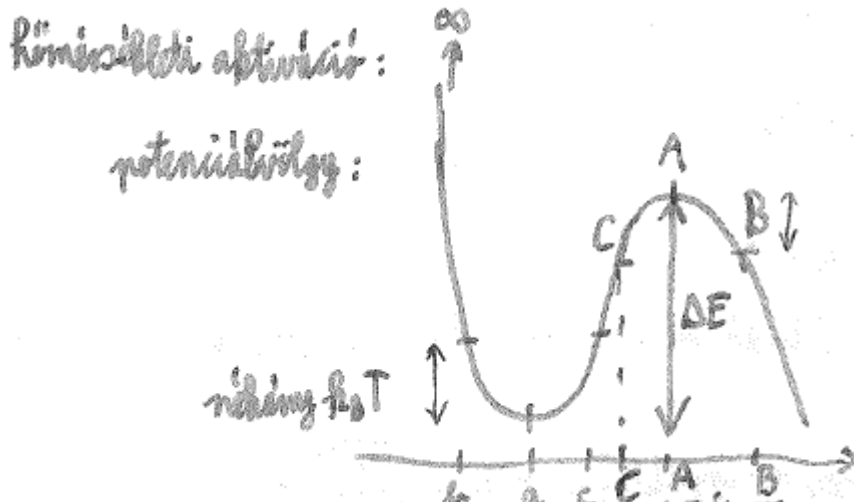
Maxwell-elosztás →

→

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{\gamma}}$$

D: diffúziós állandó

fluktuáció- disszipáció tétel vagy Einstein-törvény



$$\Delta E > k_B T \quad (\text{pl.: } \Delta E \approx 10 \cdot k_B T)$$

↓
 kevés részecske szabadul ki, a többség a völgy alján, Maxwell-eloszlás szerint (jó közelítéssel)

kiszabadulási ráta:

$$R = \nu_0 e^{-\Delta E / k_B T}$$

↑
 próbálkozási frekvencia

alakú lesz

közelítés: b és c között Maxwell elv.

normált $\rightarrow P_0 \approx \frac{1}{\int_b^c e^{-V/k_B T}}$

stac. áram- közelítés: A fölött egy kis, konstans áram folyik,
 c ponttól fölfelé gyenge kifolyás

konstans, mert itt P nagyon kicsi $\rightarrow \nabla J \approx 0$

↓
 helytől független lesz az áram
 a val. szín. és az áram is időben lassan csökken

de: a völgyben $\nabla J \neq 0$, mert onnan megy el a val. szín.

1D-ban $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_b^c e^{V/k_B T} = - \left[e^{V/k_B T} P \right]_B^C \rightarrow P_0 = \frac{1}{\int_b^c e^{-V/k_B T}}$

$P(C) \approx 0$

tfh. B-ben még érvényes a Maxwell-elv.: $P(b) = P_0 e^{-V/k_B T}$

$$k = \frac{v}{\lambda} = \frac{v \cdot k_B T / \gamma}{\int_B e^{V/k_B T} \cdot \int_C e^{-V/k_B T}} = \frac{k_B T}{\gamma} \frac{e^{-\Delta E/k_B T}}{\int_B e^{-(V(x)-V(x))/k_B T} \cdot \int_C e^{-(V(A)-V(x))/k_B T}}$$

\downarrow
 $e^{-\Delta E/k_B T}$

tfh. a völgy alján $V \sim \frac{1}{2} \omega_a x^2$

tetején $V \sim \frac{1}{2} \omega_A x^2$

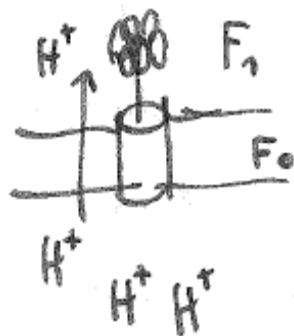
domináns járuléka és A környékéről

\downarrow
 $\int_{-\infty}^{\infty}$ -ig kiterjeszhető \rightarrow Gauss \int , elvégezhető

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{\omega_a \omega_A}}{2\pi \gamma} e^{-\Delta E/k_B T}$$

motorok: lineáris: kinezin \ mikrotubulus
 diezin /
 miozin - aktív

forgó: ATP szintáz



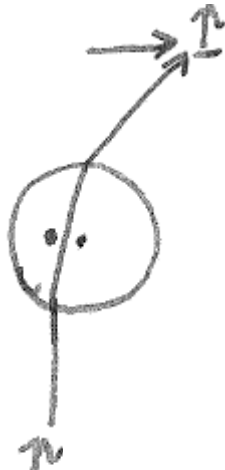
H⁺ grad hajtja az alsót
 ATP bontás a felsőt
 a kettő egymás ellen dolgozik

H⁺ grad kicsi \rightarrow ATP lebontás H⁺ grad nagy \rightarrow ATP szintézis
 H⁺-t pumpál alulra

motorok vizsgálatára optikai csapda
 μ m nagyságú golyó, törésmutatója nagyobb a vízénél
 erre lézernyalábot fókuszálunk



ha elmozdul a fókuszából:



elhajlás → a foton \uparrow impulzust kapotta golyótól
 \uparrow impulzust kap a golyó, vagyis a lézer megpróbálja visszahúzni

ha függőlegesen mozdul el (felfelé):

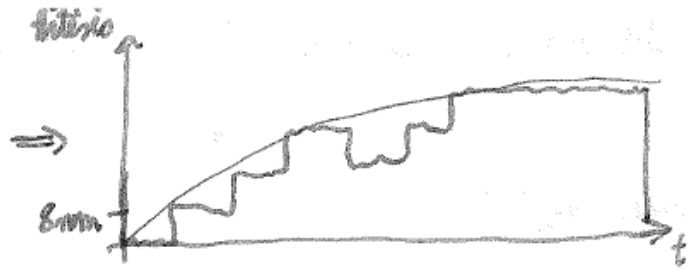
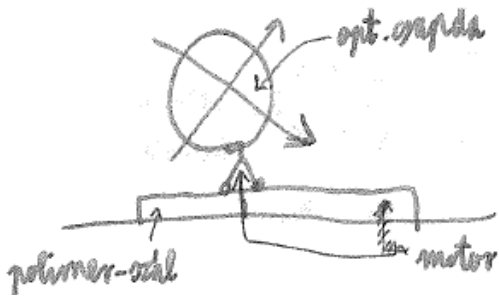


hengersizimm. → nem kap vízsz. impulzust
 függ. impulzust kap, a fény lefelé húzza
 → mindig visszafelé húzza a fény

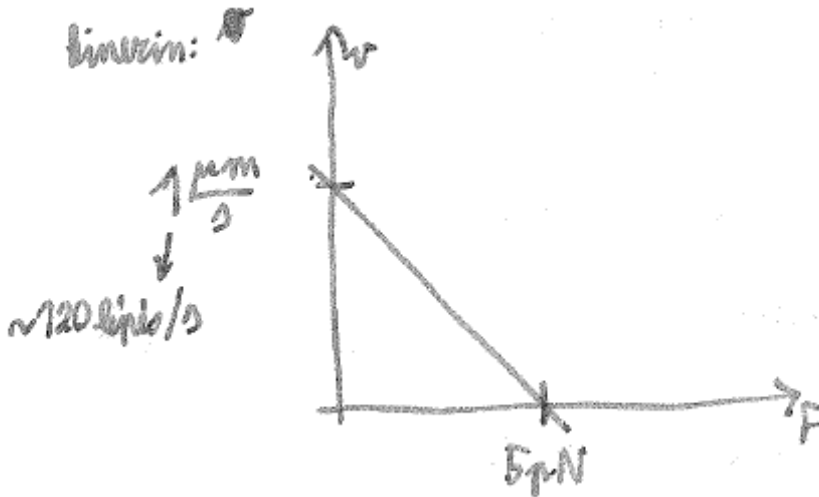
a visszahúzó erő nagysága:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha \frac{\Delta p_{tot}}{\Delta t} = \frac{\alpha \cdot \Delta E_{tot}}{c \Delta t} = \frac{\alpha}{c} P = \frac{10 \text{ mW}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \alpha \cdot 33 \text{ pN}$$

ha elnyeli az összes foton, lézernyaláb teljesítménye $\alpha \approx 0,1$
 ($\alpha < 1$ ← ennél kisebb lesz az erő,
 α függ attól is, hogy van a golyó)



pl: kinezinnél 8 nm-es lépcsők → /ekkora egy monomerje/, azaz egy „elemi lépés”



racsní modellek



a molekuláris motor lokálisan látja a szál irányát
 szál → 1D, aszim., periodikus, ebben mozogjon a motor



1.ötlet: hőmérsékleti zaj miatt mehetne jobbra a motor, mert arra könnyebben felmegy

de ezt tiltja a II. főtétel
 tfh. mégis megvalósul, van egy stac.elv., stac.áram-térben homogénnek kell lennie

$$\dot{p} = -\partial_x j \quad (1) \quad \rightarrow \quad \dot{p} = 0 \rightarrow \partial_x j = 0 \rightarrow j(x,t) = j_{st}$$

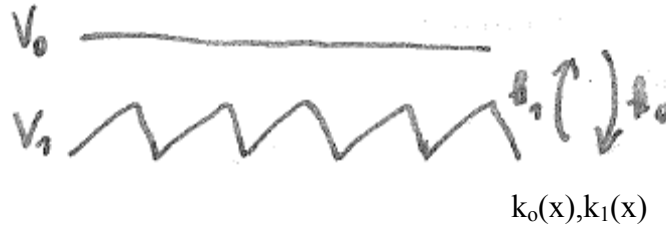
$$j = -D e^{-V/k_B T} \partial_x (e^{V/k_B T} p) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \underbrace{-\frac{j_{st}}{D} \int_0^x e^{V/k_B T}}_{>0} = \left[e^{V/k_B T} p \right]_0^x = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{st} = 0$$

↑
↑
↓

stac. elv.: $V(x)$ és $P(x)$ is periodikus
 II. főtétel teljesül

a potenciát lehet ki-be kapcsolni:



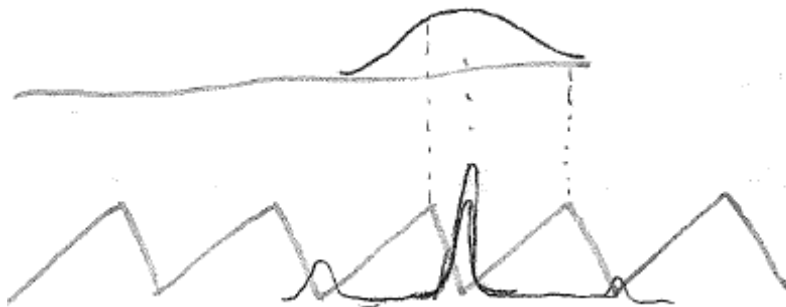
rátával kapcsolás

V_0 : szabad diffúzió
 V_1 : beáll a részecske a min. környékére
 ha a részletes egyensúly teljesül:

$$\frac{k_1(x)}{k_0(x)} = e^{-\frac{V_0(x) - V_1(x)}{k_B T}}$$

↓
 hőmérsékleti egyensúly → nincs makroszkópikus áram
 legegyszerűbb mego.: állandó, helyfüggetlen ráták → ≠ helyfüggő exp. kifejezés
 ↓
 részl. egyens. nem teljesül

tfh. V_1 elég mély →



éles eloszlás
 ↓ V_0 -ra kapcsolunk
 Gauss
 ↓ V_1

több csúcs lesz
történik elmozdulás

ez a flashing racsni

rocking racsni

a részecskét, hol balra húzzuk, az erő időátlagra legyen 0

erő → mintha billegtetnénk a potenciált

tfh. a hőmérsékleti zaj alacsony

erő nagysága > mint a lapos meredekség, de < mint a meredek meredekség

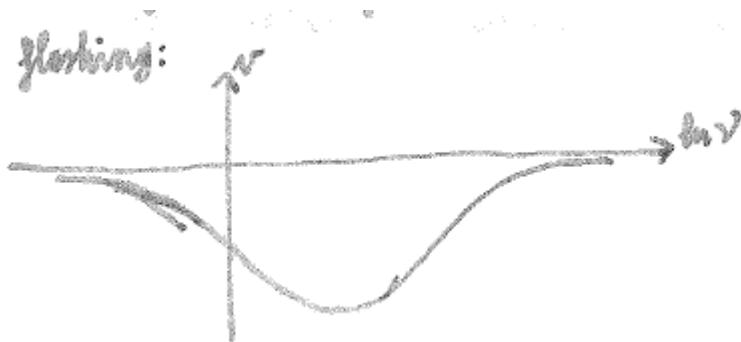


jobbra el tud mozdulni, balra nem

hőmérséklet $\neq 0$ → kis valószínűséggel balra is megy

→ 32 $\neq 0$, jobbra megy

biológia: inkább flashing racsni, más a potenciál az ATP hidrolízis különböző szakaszaiban



v: kapcsolási frekv.

gyors kapcsolás → átlagpotenciált érez, nem mozog

lassú kapcsolás → sebesség ~ kapcsolásuk száma



lassú döntögetés → adott sebességgel
megy jobbra, utána áll, csak az idő
számít, a frekv. nem



állandó sebesség

power-stroke modell



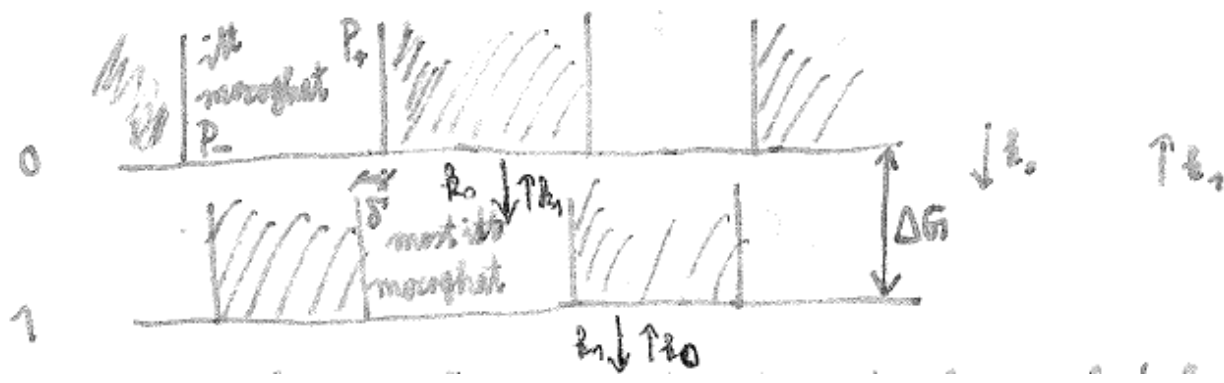
minden periódusban egyet ugrik

ebben mozgó részecske a lankásabb potenciáloldal meredekségénél kisebb erőt tud csak kifejteni, max. erő bele van építve a potenciálba

információs racsni

részecske szabadon diffundál, falakkal le van zárva a tér

odaér egy falhoz → áttesszük a falat mögé, zsilipelés



tfh. kapcsolás nem amikor a falhoz ér, hanem k_0 és k_1 rátával
 $k_0 > k_1$

$$\frac{k_0}{k_1} = e^{\Delta G / k_B T}$$

(3) pl: egy reakcióhoz kapcsolódik a kapcsolás, reakcióban ΔG szabad energia felszabadul, $V_1 < V_0$ lesz kémiai reakció \rightarrow részleges egyensúly

ekkor az áram: áramle áram vissza

$$j = k_0 P_+ \delta - k_1 P_- \delta$$

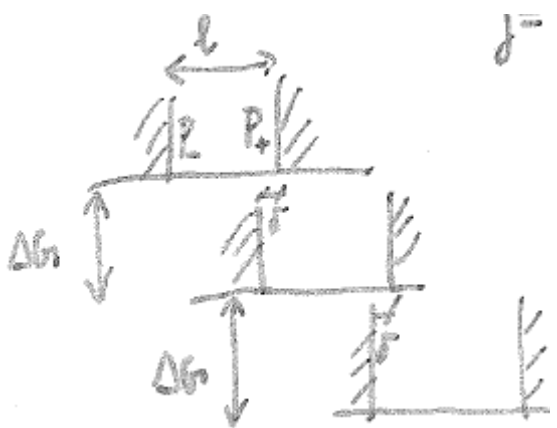
áram a dobozok közt \rightarrow

$$j = D(P_- - P_+) / l$$

áram egy dobozon belül \rightarrow

$$\frac{P_- + P_+}{2} = \frac{j}{l}$$

normális



$$j = \frac{2D}{l^2} \frac{k_0 - k_1}{\frac{2D}{\delta l} + (k_0 + k_1)} < \frac{2D}{l^2} \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \stackrel{j}{=} \frac{2D}{l^2} \tanh\left(\frac{\Delta G_1}{2k_B T}\right)$$

$j > 0 \iff k_0 > k_1$
 részecskék sebessége:

$$v = \langle j \rangle \approx \frac{2D}{l} \operatorname{th}\left(\frac{\Delta G}{2k_B T}\right) \approx \frac{2D}{l} \frac{\Delta G}{2k_B T} = \frac{1}{8} \cdot F$$

F: a „potenciál-dobozokon” átfektetett egyenes meredeksége
 részecske úgy mozog, mintha $F = \Delta G/l$ állandó erővel húznánk

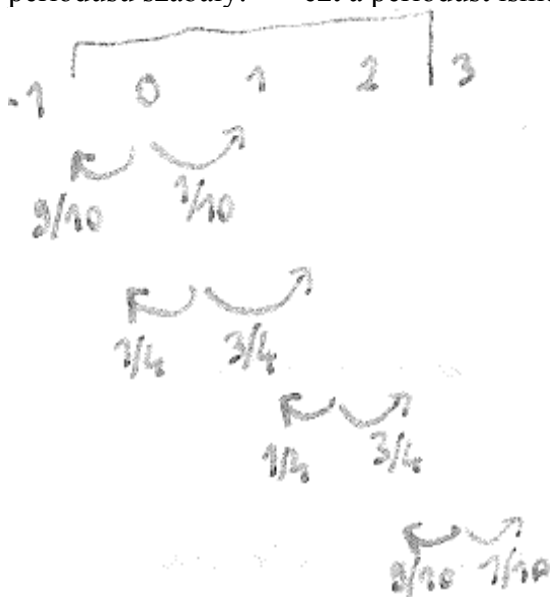
racsni → játékelmélet



p: nyerünk 1-p: veszünk
 igazság játék: $p = 1/2$
 kaszinó: $p = 1/2 - \epsilon$

ez 1 periódusú szabály

3 periódusú szabály: ezt a periódust ismétljük



ebből egy aszimmetrikus racsni rajzolható

$$\frac{1/10}{1/4} = e^{-(E_1 - E_0)}$$

$$\frac{3/4}{1/4} = e^{-(E_2 - E_1)}$$

$$\frac{3/4}{9/10} = e^{-(E_3 - E_2)} \quad \text{is } E_3 = E_0$$

ezeket összeszorozva:

$$\frac{1/10 \cdot 3/4 \cdot 3/4}{1/4 \cdot 1/4 \cdot 9/10} = 1$$

→ igazságos játék, nincs átlagos mozdulás

kaszinó: nyerés val.szín.-ek $-\varepsilon$, vesztes val.szín. $+\varepsilon$ → ~ racsní megdöntése

kapcsolgatás a 2 játék között → még ε -nal terhelve is nyerhetünk, ~ flashing racsní

Élőlények kollektív mozgása

valóság → modell (~karikatúra)

↓ ↓
 numerikus analitikus számolás

nagyszámú hasonló egyed, ezek mozgása hasonlóságot mutat, rendezetten mozognak
 pl: madárrajok, katonahangyák (ferromon felhőben ∞ ciklus, napokig kering)
 rendeződés-ált. a helyi kölcsönhatások eredménye

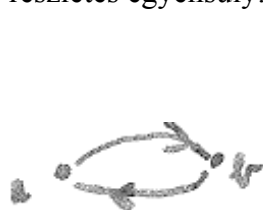
mágneses modell:

minden objektumot jellemez egy vektor (mozgás iránya) J_i
 ferromágneses állapot ~ rendezett mozgás

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_i J_j \Rightarrow P(\{J\}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z}$$

β : állatokat mennyire érdekli, hogy merre mozog a többi állat

részletes egyensúly:



$$p(a) w(a \rightarrow b) = p(b) w(b \rightarrow a)$$

$$\frac{w(a \rightarrow b)}{w(b \rightarrow a)} = e^{-\Delta \mathcal{H}(a,b) / k_B T}$$

, ha ez teljesül

↓
 van egy stac. eloszlás, amire

$$P(\{J\}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z}$$

Markov-lánccal is elérhető egy ilyen rendszer

d: ez az x-y ferromágnes, 2 dimenzióban nincs hosszútávú rendezett állapota
 a Mermin-Wagner tétel miatt
 alapállapot:



szabad energia: $F = E - TS$

$T \neq 0$:



2. ilyesmi állapotok lesznek, egy láncon
 körbeforgdul a spin, a többin is

ugyanúgy

1. : $E=0, S=0$ (csak 1 ilyen mikroállapot) $\rightarrow F=0$

$$\textcircled{2}: E \sim \frac{1}{l^2} \cdot l^2 = \text{konst.} > 0 ; \quad S = k \ln W \approx k \cdot \ln l$$

\uparrow E^2 db. spin
 \uparrow $W \leq l$, mert a hullámot l különböző helyről indíthatom, és még más ilyen energiájú állapot is lehet
 $F = \text{konst.} - k \ln l < 0$, ha l elég nagy

$\nu \sim \frac{1}{l}$
 skálázóerő $\rightarrow \frac{1}{l}$

ez a kép

- nem vesz figyelembe, hogy mozognak az állatok

javítása:

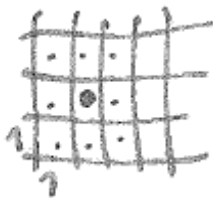
egyednek van helyzete, iránya

$$\begin{cases} \vartheta_i(t+1) = \langle \vartheta(t) \rangle_i + \xi_i \\ \bar{x}_i(t+1) = \bar{x}_i(t) + v_0 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

ξ_i zaj, átlaga 0
 átlag a szomszédaira

→ ez felel meg annak, hogy az i . részecske minimalizálni akarja a a mágneses \mathcal{H} -t.

szimuláció:



egységnyi négyzetek (kölsönhatási távolság legyen 1)



csak a környező négyzetekben levőkkel hat potenciálisan kölsön

rendezettség kialakulhat – kis szórás

rend kialakulása: - kezdetben örvények, később ezek megszűnnek

paraméterek: v_0 , L (méret), N (részecskék száma), σ (zaj szórása)

kölsönhatási távolság, választható egynek

v_0 : legyen elé kicsi, hogy a szomszédási viszonyok fennmaradjanak egy ideig

túl kicsi \rightarrow lassan történik valami $\rightarrow v_0 \approx 0,3$

kicsit mesterségesen bevezetett paraméter

$N, L \rightarrow 9$

2 fontos paraméter: ρ, σ

határfeltételek: - visszaverő fal \rightarrow a fal-részecske kölsönhatás határozná meg a viselkedését

- periodikus határfeltétel – szerencsésebb választás

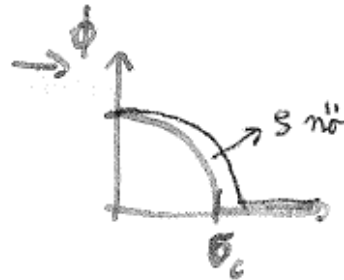
rendparaméter:

$$0 \leq \phi = \frac{|\sum \vec{r}_i|}{N r_0} \leq 1$$

simuláció $\rightarrow \phi_1$ $g = \text{áll.}$



$$\rightarrow \phi \sim \begin{cases} |\sigma - \sigma_c|^\beta, & \text{ha } \sigma < \sigma_c \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$



ez 3D-ban: \vec{v} helyett sebességvektor

$$\vec{v}_i(t+1) = v_0 \mathcal{N}(\mathcal{N}(\langle \vec{r}(t) \rangle_i) + \eta \vec{E}_i)$$

$$\mathcal{N}\vec{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

normálási operátor

tud rendeződni

ezeknél is folytonos fázisátalakulás

1D-ban is tud rendeződni

hibák: lokálisan S tetszőlegesen nagy lehet idő diszkrét



hidrodinamikai modell

$$g, \vec{r}, \rho$$

folyadék + belső erő, ami hajtja + párhuzamos beállást preferáló tag

$$\dot{g} = \nabla \cdot (g \vec{r})$$

$$\text{Navier-Stokes: } \dot{\vec{r}} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{F}(\vec{r}, v_0) - \frac{1}{\tau} (\langle \vec{r} \rangle - \vec{r}) - \frac{1}{S} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{r} \quad (1)$$

\swarrow hajtóerő \swarrow rendezítő tag
 \swarrow Engima átlag

$$\text{legyen } \vec{F}(\vec{r}, v_0) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} v_0 - \vec{r} \right)$$

lokális átlag kifejezhető deriváltakkal

1D-ban: $\langle \bar{r} \rangle_\varepsilon = \langle v(x) \rangle_\varepsilon = \frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v(x+\xi) g(x+\xi) d\xi}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x+\xi) d\xi}$ Taylor-sor

$\rightarrow \varepsilon \rightarrow 1.$ deriváltas tag ξ -vel össze-miért kisebb

$$= \frac{v(x)g(x)2\varepsilon + (vg)''(x) \cdot \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \xi^2 d\xi}{g(x)2\varepsilon + g''(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^3}{3}} = \frac{v + \frac{\varepsilon^2}{6} \frac{(vg)''}{g}}{1 + \frac{\varepsilon^2}{6} \frac{g''}{g}}$$

$$= v + \frac{\varepsilon^2}{6} \frac{(vg)''}{g} - \frac{\varepsilon^2}{6} v \frac{g''}{g} + \dots = v + \frac{\varepsilon^2}{6} [v'' + 2v' \frac{g'}{g}]$$

$$\langle \bar{r} \rangle - v = \frac{\varepsilon^2}{6} [v'' + 2v' \frac{g'}{g}]$$

2D-ban: Taylor-sor: $F(x+\xi) = F(x) + \sum_i \xi_i \partial_i F(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \partial_i \partial_j F(x)$

\downarrow $F(x) \cdot A$ \downarrow min. távolság 0 \downarrow $i \neq j$ 0 \downarrow $i=j$ $\neq 0$

$$\int F(x+\xi) = F(x) \cdot A + \frac{1}{2} \left(\sum_i \xi_i^2 \partial_i^2 \right) F(x) = F(x) \cdot A + B \cdot \nabla^2 F(x)$$

$$\langle \bar{r} \rangle - \bar{r} = C \left[\nabla^2 v + 2 \frac{(\nabla \bar{r})(\nabla g)}{g} \right]$$

(1) num. integrálása

kis tartomány \rightarrow 1 örvény (zárt határfelt: nem lehet stac. mego., hogy mindenhol 1 irányba mozog)

nagyobb tartomány \rightarrow sok örvény, lokálisan rendezett

pl: baktériumtelepeknél lehet ilyesmit látni

Emberek mozgása

emberek egy adott mozgási szituációban hasonlóan viselkednek (pl: akadály, kikerülése), átlagos viselkedés megállapítható

x: emberek helyzete

kérdés: $\ddot{\mathbf{x}} = \dots$
 vagy $\dot{\mathbf{x}} = \dots$ írja le jobban
 biomechanika \rightarrow mozgás közben a felső test \sim egyenletes sebességgel mozog,

ehelyett lehet $[\dot{v}_i^0 - \bar{v}_i]$ is, ekkor van preferált iránya is

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{\tau} [\dot{v}_i^0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i - \bar{v}_i] + \sum_{i \neq j} \bar{\mathbf{f}}_{ij} + \sum_w \bar{\mathbf{g}}_{iw} \sum_w \bar{\mathbf{g}}_{iw}$$

\uparrow
egymás elkerülése
 \uparrow
fal elkerülése

$\bar{\mathbf{e}}_i$: mozgásirány, $|\bar{\mathbf{e}}_i| = 1$

\dot{v}_i^0 : egyedfüggő preferált sebesség

$\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}}$: lokális erők legyenek

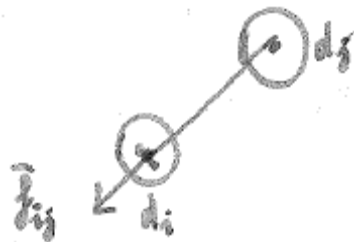
$\bar{\mathbf{f}}_{ij}(\bar{\tau}_{ij}, \bar{v}_i)$ \leftarrow függ attól, hogy merre néz az ember

legyen:

$$\bar{\mathbf{f}}_{ij} = A_i e^{(-\tau_{ij} + \frac{d_i + d_j}{2})/B} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{ij} \quad (\text{ha } \tau_{ij} < \frac{d_i + d_j}{2})$$

$\bar{\mathbf{f}}_{ij} \perp \bar{\mathbf{e}}_{ij}$ (\leftarrow taszító erő)

d_i, d_j : emberek véges mérete



fállal való kölcsönhatás:



ha 2 ember érintkezik:



van egy $\bar{\tau}_{ij}$ -vel \parallel komponens, és egy \perp is (\leftarrow súrlódás)

$$\vec{f}_{ij} = \begin{cases} \sim \left(\frac{d_i + d_j}{2} - \tau_{ij} \right) \Delta v_{\perp} \\ \vec{f}_{ij} \perp \vec{e}_{ij}, \text{ divergál} \end{cases}$$

Lindang



ezt a modellt lehet nézni különböző helyzetekben:
pl: folyosó:



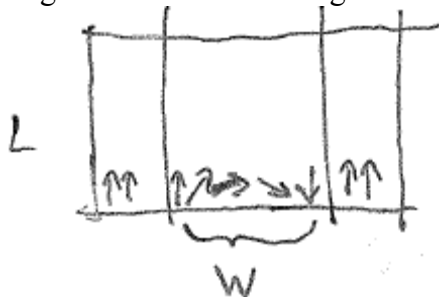
szembe mozognak
 \downarrow
sávok alakulnak ki

ajtó:



ha nagyon megnő a sűrűség, nem tudnak kimenni
hogyan lehet terelőlapokat betenni, ami nem engedi
túlságosan megnőni a sűrűséget?

kiegészítés a Mermin-Wagner tétel bizonyításához:



$$E = \left(\frac{1}{W} \right)^2 \cdot WL = \frac{L}{W} \rightarrow \text{const.}$$

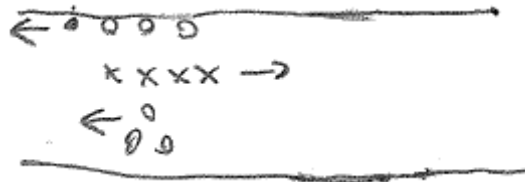
L helyen kezdődhet a W széles, spinhullámos domén

$$S = \ln(L-W) \sim \ln L$$

$$F = E - TS = \text{const.} - T \ln L$$

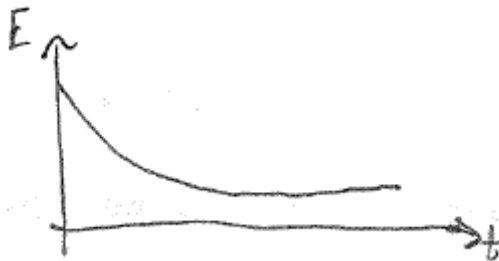
előző órai érvelés rossz: máshol kezdődik a hullám \rightarrow uannyi db., mintha a rendezett állapotot forgatnám mindkét esetben megjelenik egy szögváltozó (kezdőfázis v. mágn. iránya)

folyosó, szembe haladó emberek:
sávok

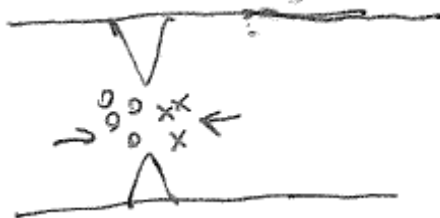


$$E := \sum_i (\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i)^2$$

: mennyire tudnak arra menni, amerre akarnak



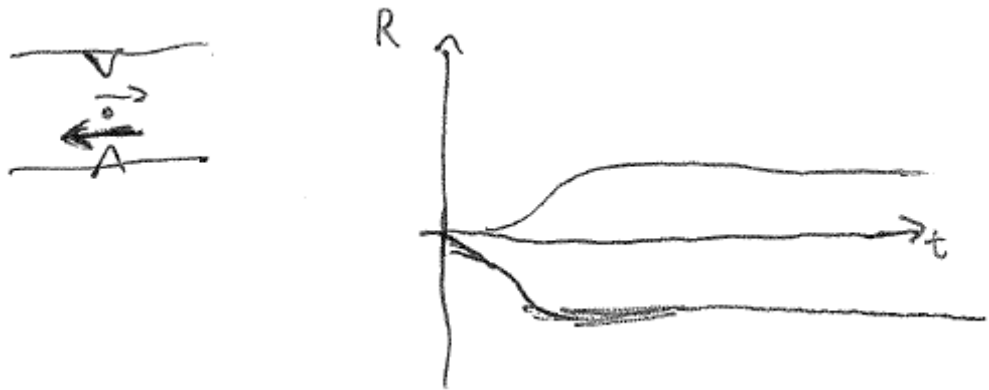
ugyanez szűkülettel:



$R(x=0)$: áram a szűkületen át



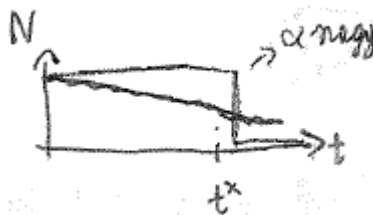
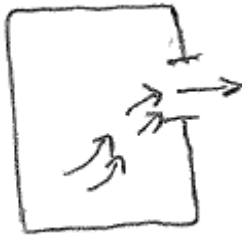
még egy akadály közepre:



$$\ddot{x}_i = f_1(\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i) + \sum_{i \neq j} f_2(x_1, x_2, v_1, v_2) + \alpha \cdot \langle \vec{v}_i \rangle - \vec{v}_i$$

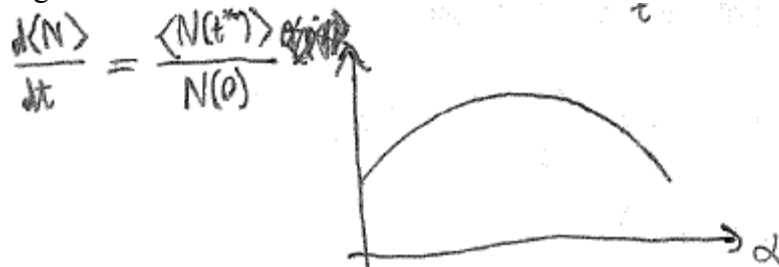
↓
szeretnek egy irányba mozogni

↓
az ajtón mennek kifelé
nem tudják előre, hol van az ajtó



lépcső fgv.

$\langle N \rangle$: sokaságátlag



nagy $\alpha \rightarrow 1$ csapat, bolyong, hosszú bolyongás után megy ki

↓
 $\langle N \rangle$ lassan csökken

analitikus vizsgálatok

x_i, v_i részecske

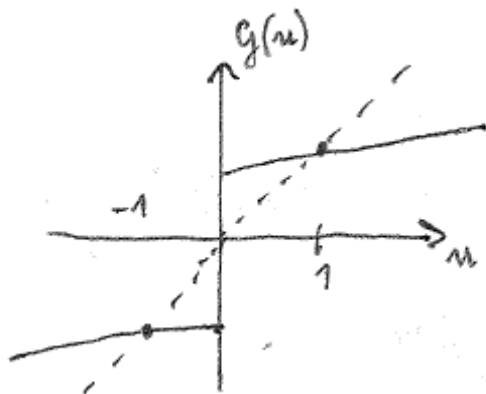
1D:



$$\begin{cases} x_i(t+\tau) = x_i(t) + v_0 \tau m_i(t) \\ m_i(t+\tau) = g(\langle m_i \rangle_\varepsilon) + \xi_i \end{cases}$$

mikroszkópikus leírás

↑
véletlenszám
 P_ξ eloszlással



$n=1$ és $n=-1$ -ben stabil egyensúlyi helyzete van $n>0 : n \rightarrow 1$
 $n<0 : n \rightarrow -1$
gyorsító erő és átlagos tartás benne van a G-ben

ehhez kontinuumegyenlet (makroszkópikus skálájú leírás)

levezethető, hogy

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{s} = -v_0 (g(u))' + D g'' & +v_1 \\ \dot{u} = g(u) + \mu^2 u'' + \alpha \frac{u^2 s'}{s} & +v_2 \end{cases}$$

↑ a várható értékek viselkedésére
0 várh. értékű zajok beírhatóak, a szórásból becsülhetők

1D ferromágnes:

$$\mathcal{H} = \sum_i \phi(s_i) + \sum_i [(s_{i-1} - s_i)^2 + (s_i - s_{i+1})^2]$$

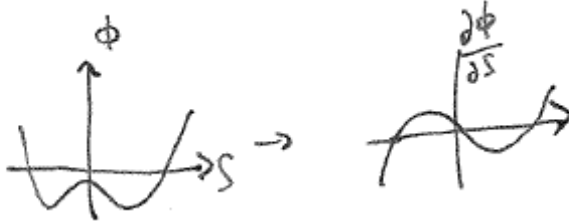
$$\downarrow$$

$$\dot{s}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_i} = \sum \frac{\partial \phi}{\partial s_i} + 2 \underbrace{[-(s_{i-1} - s_i) + (s_i - s_{i+1})]}_{\approx s''}$$

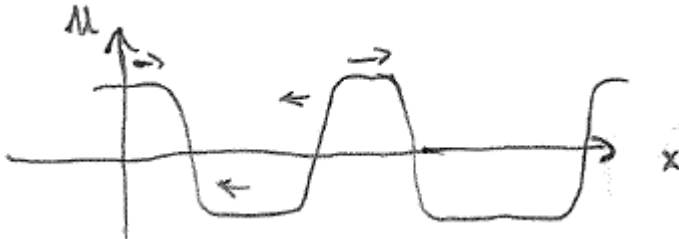
→ hasonló az U-ra felírt egyenlethez

↓

doménszerkezet



(1) → sebességeloszlásban domének alakulnak ki, doménfalaknál a részecskék összegyűlnek v. elmennek onnan



sűrűségeloszlás: instabillá teszi a doménfalakat, elkezdenek vándorolni a doménfalak, →
 → mozgó csoportok → végül az egész rdsz. egy irányba áll be
 ha α elég nagy → doménfalak instabilak lesznek

2D: renormálás → sebességkorreláció

$$\langle v(\vec{r} + \vec{r}', t) v(\vec{r}, t) \rangle_{x, t} = (M^2) \phi^2 + C(\vec{r})$$

$$C(\vec{r}_\perp) \sim v_\perp^{-2x}$$

hatványfgv.